Zahlbereiche

(Didaktik der Mathematik)

SS 2012

(Prof. Dr. Stefan Krauss)

Julian Palme

(Stand: 16. Juli 2012)

I Zahlbereichserweiterungen

1.1 Mathematische Leitideen

(1) Zahl

- sinnvoller Zahlbegriff, Größenvorstellung
- Rechenfertigkeit, Rechenverfahren

(2) Messen

- Grundprinzip des Messens mit Größen
- Umgang mit Größen, Größenvorstellung
- Rechnen mit Größen

(3) Raum und Form

- Erkennen geometrischer Objekte und Zusammenhänge
- Operieren mit geometrischen Objekten

(4) Funktionaler Zusammenhang

- Funktionale Zusammenhänge und ihre Darstellung
- (indirekte) Proportionalität
- Lösen von Gleichungen

(5) Daten und Zufall

- Umgang mit Daten, Datendarstellung
- Häufigkeiten und Mittelwerte
- Wahrscheinlichkeitsaussagen

1.2 Mathematische Kompetenzen

(1) mathematisch argumentieren

(2) Probleme mathematisch lösen

(3) mathematisch modellieren

(4) mathematische Darstellungen verwenden

(5) Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen

(6) kommunizieren

1.3 Anforderungsbereiche

(I) Reproduzieren

Wiedergabe und direkte Anwendung von bekanntem Wissen und eingeübten Verfahren

(II) Zusammenhänge herstellen

Verknüpfung von Wissen und Fähigkeiten aus verschiedenen Gebieten der Mathematik

(III) Verallgemeinern und Reflektieren

Finden eigener Lösungen/Begründungen/Wertungen/Problemformulierungen

II Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

2.1 Wofür können natürliche Zahlen stehen? (Blatt 1, Aufgabe 3)

- Kardinalzahlen (Anzahl)

  Frage: Wie viele?

  $\rightsquigarrow$ Absolutskala

- Maßzahl (Größen)

  Frage: Was kostet? / Wie lange? / Wie groß?

  $\rightsquigarrow$ Verhältnisskala (falls auch negative Zahlen sinnvoll sind: Intervallskala)

- Ordinalzahlen (Anordnung)

  Frage: Der/Die/Das Wievielte?

  $\rightsquigarrow$ Ordinalskala

- Kodierzahlen (bloße Nummernzuordnung)

  $\rightsquigarrow$ Nominalskala

- Operatoren (Bezeichnung einer Rechenoperation)

  Frage: Wie oft?

- Rechenzahl

2.2 Skalenniveaus

2.2.1 Nominalskala

- $=$, $\neq$ (unterscheiden)
- Größenunterschiede KEINE Bedeutung

2.2.2 Ordinalskala

- $=$, $\neq$, $<$, $>$ (zusätzlich ordnen)
- Abstände KEINE Bedeutung

2.2.3 Kardinalskala (Blatt 1, Aufgabe 3)

- **Intervallskala**
  - $=$, $\neq$, $<$, $>$, $+$, $-$ (zusätzlich Abstände vergleichen, Mittelwerte bilden)
  - kein natürlicher Nullpunkt
  - keine natürliche Einheit
- **Verhältnisskala**
  - $=$, $\neq$, $<$, $>$, $+$, $-$, $\cdot$, $:$ (zusätzlich Verhältnisse vergleichen)
  - natürlicher Nullpunkt
  - keine natürliche Einheit
- **Absolutskala**
  - $=$, $\neq$, $<$, $>$, $+$, $-$, $\cdot$, $:$ (zusätzlich Verhältnisse vergleichen)
  - natürlicher Nullpunkt
  - natürliche Einheit

2.3 Unterrichtsinhalte und Ziele in Klasse 5

2.3.1 Inhalte

- $\mathbb{N}$ als Menge
- Darstellungsformen von $\mathbb{N}$ (Ziffern, Stellenwertsystem, Zahlenstrahl)
- Ordnungsrelationen und Rechnen mit $\mathbb{N}$ (Rechengesetze, Schätzen, Überschlagen, Runden)
- Teilbarkeitslehre (ggT, kgV, Primzahlen, PFZ, Teilbarkeitsregeln)

2.3.2 Ziele

- Reflexion der Kenntnisse aus der Grundschule ($\rightsquigarrow$ algebraische- und Ordnungsstruktur)
- Systematisierung des Wissens um $\mathbb{N}$ (formale Begriffe)
- Diskussion der Unendlichkeit von $\mathbb{N}$
- Vertiefung der Kenntnisse durch Betrachtung von Teilrelationen, PZ etc.
  ($\rightsquigarrow$ Vorbereitung für Bruchrechnung)

2.3.3 Einstieg in Klasse 5

- Alle Schüler auf gleichen Stand bringen
- Rechenregeln müssen explizit werden (Anwendungskompetenz $\not\Rightarrow$ Hintergrundwissen)
- Fragen folgender Art hilfreich
  - $\rightsquigarrow$ Was musst du machen um ...?
  - $\rightsquigarrow$ Wie hast du das gerechnet?
  - $\rightsquigarrow$ Warum ist ...?
  - $\rightsquigarrow$ Was bedeutet ...?

2.4 Darstellungsarten natürlicher Zahlen

- Dezimalsystem (Klasse 5: Fokus auf Anordnung)
- Potenzschreibweise
- Tabellen und Diagramme

- Darstellung ohne Stellenwertsystem (z. B. römische Zahlen)

I	V	X	L	C	D	M	V
1	5	10	50	100	500	1000	5000

- ggf. andere Stellenwertsysteme (z. B. Dualsystem)
- natürliche Zahlen am Zahlenstrahl

2.5 Rechnen mit natürlichen Zahlen

2.5.1 Addition und Subtraktion

Neu in Klasse 5:

- Darstellung der Rechenoperation am Zahlenstrahl
- Einführung von Fachbegriffen
  ⇝ Summand, Summe, Summenwert, Minuend, Subtrahend, Differenz, Differenzwert
- Subtraktion als Umkehroperation zur Addition
- Diskussion der besonderen Rolle der Null als neutrales Element

Fokus weg von Zahlen hin auf Eigenschaften der Verknüpfung: Rechnen von links nach rechts, ansonsten Klammern nötig

2.5.2 Multiplikation und Division

Neu in Klasse 5:

- Multiplikation auf Addition zurückgeführt
- Einführung von Fachbegriffen
  ⇝ Faktor, Produkt, Produktwert, Dividend, Divisor, Quotient, Quotientenwert
- Division als Umkehroperation zur Multiplikation
- Diskussion der besonderen Rolle von Eins und Null

Fokus weg von Zahlen hin auf Eigenschaften der Verknüpfung: Rechnen von links nach rechts, ansonsten Klammern nötig

2.5.3 Rechengesetze zur Addition und Multiplikation

- Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)
- Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

Gesetz in Worten formulieren $\longrightarrow$ Beispiel zum Verdeutlichen $\longrightarrow$ abstrakte Formulierung mit Variablen $\longrightarrow$ Visualisierung

Schüler sollen außerdem Vorteile der Regeln erkennen.

2.5.4 Gemeinsames Auftauchen der vier Rechenarten

Potenz vor Punkt vor Strich, die Klammer sagt, zuerst komm ich! ODER KlaPoPuS

2.5.5 Präsentation der fünf Gesetze

(1) Kommutativgesetz Addition: $a + b = b + a$

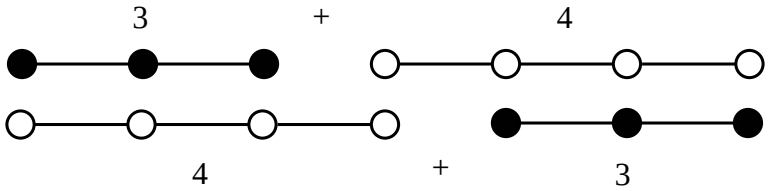
(2) Kommutativgesetz Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

(3) Assoziativgesetz Addition: $a + (b + c) = (a + b) + c$

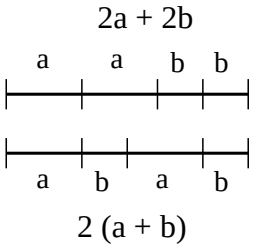
(4) Assoziativgesetz Multiplikation: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(5) Distributivgesetz (Verteilungsgesetz): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$\rightsquigarrow$ können mit Strichdiagrammen visualisiert werden, z. B.



$\rightsquigarrow$ geometrische Deutung des Distributivgesetzes



2.6 Vorteilhaftes Rechnen

- Erst der Zehnerübergang
- Zwei gleiche addieren sich leichter

Wichtig für den Lehrer: Bewusstmachung der kognitiven Schritte zur Lösung einer Aufgabe

- Rechenregeln: müssen Schüler wissen und können
- Strategien (VR): sollten Schüler können und wissen (Lösen ist einfacher)

$\Longrightarrow$ Lehrer kann Denken der Schüler analysieren und gezielt unterstützen

2.6.1 Ziele

- Kenntnisse verschiedener Strategien
- aufgabenspezifischer Einsatz
- wichtigste Strategien soll der Schüler im Kopf anwenden können

2.6.2 Bemerkungen

- „optimale Strategie“ abhängig von Aufgabe und individuellen Kenntnissen
- VR basiert auf Erkennung von Zahlbeziehungen und Termstrukturen
- Kompetenzaufbau durch Explizierung von Lösungswegen, Strategien und Bedingungen

2.7 schriftliche Rechenverfahren

2.7.1 Bemerkungen

- Einführung in Klasse 3 und 4, später Erweiterung
- universell einsetzbare Algorithmen
- „Ziffernrechnen“

2.7.2 Schriftliche Subtraktion

Ergänzungsmethode mit Erweitern (gleichsinniges Verändern)

- „von ... auf ... fehlen“
- Minuend um 10 Zehner erhöht $\Longrightarrow$ auch Subtrahend muss um 100 erhöht werden

Abziehmethode (mit Entbündelung)

- $8 - 9$ geht nicht $\Longrightarrow$ ein Zehner muss *entbündelt* werden $\Longrightarrow$ $18 - 9 = 8$
- „Borgetechnik“ missverständlich, da nichts zurückgegeben wird
- Nachteil: kein Platz beim schriftlichen Dividieren, mangelnde Übersichtlichkeit etc.
- Lösungsvorschläge
  - Zeile freilassen
  - Nebenrechnung
  - altes Abziehverfahren
  - Kopfrechnen
  - halbschriftlich Rechnen

2.7.3 Allgemeine Schwierigkeiten (schriftliche Subtraktion)

- Anzahl der Überträge
- Stellenzahlunterschiede bei Minuend und Subtrahend
- Nullen
- beim Ergänzungsverfahren: Rechenrichtung bzw. Verwechslung von + und -
- negative Zahlen - Rechenregeln

2.7.4 Intervention (schriftliche Subtraktion)

- anschauliche Darstellung (Geld, Stellenwerttafel etc.)
- Überschlagsrechnen, Schätzen
- Aufgaben zur Analyse von Fehlern

- spezielles Wiederholen und Üben des Übertrags
- Klärung des Begriffs der Null
- Konsequente Notation von Übertragsziffern

2.7.5 Schriftliche Multiplikation

meist nicht schwierig für Schüler

2.7.6 Schriftliche Division

- schwierigstes Normalverfahren
- Zerlegung des Dividenden in Teilsummen

2.7.7 Arten des Rechnens

- mündlich
- halbschriftlich
- schriftlich
- VR überall möglich

2.7.8 Teilkompetenzen zur Vermeidung von Schülerfehlern (schriftliche Division)

- Stellenwertsystem muss verstanden sein
- Überschlagsrechnung
- Dividieren mit Rest
- schriftliche Subtraktion und Multiplikation in Kurzform automatisiert

2.7.9 Grundvorstellungen zur Division

(A) Teilen-Vorstellung

$\rightsquigarrow$ Aufteilen, Verteilen

(B) Enthaltensein-Vorstellung

$\rightsquigarrow$ „geht in“, „passt in“

(C) Subtraktionsvorstellung

Bemerkung: Nur *echtes* Verständnis ermöglicht i.d.R. Transfer von Wissen auf ähnliche Situationen!

2.8 Schätzen, Runden, Überschlagen (Blatt 4, Aufgabe 1)

- Schätzen: Gefühl, Erfahrung
- Runden: eindeutige Regeln, systematisch
- Überschlagen: Rechnen mit geschätzten/gerundeten Zahlen
  $\rightsquigarrow$ dient oft der Kontrolle von Ergebnissen
- Fermi-Aufgaben: Aufgabe verstehen $\longrightarrow$ Modell erstellen $\longrightarrow$ Mathematik nutzen $\longrightarrow$ Ergebnis erklären

Lernziele: Kompetenzen der Bildungsstandards werden angestrebt

2.9 Teilbarkeit und Primzahlen

2.9.1 Teilbarkeitsregeln

Endstellenregel (ER), Quersummenregel (QR), zusammengesetzte Teilbarkeit (ZT)

- durch 2: gerade Zahlen (ER)
- durch 3: Quersumme durch 3 teilbar (QR)
- durch 4: letzte 2 Stellen 0 oder druch 4 teilbar (ER)
- durch 5: letzte Stelle 0 oder 5 (ER)
- durch 6: durch 2 und 3 teilbar (ZT)
- durch 7: -/-
- durch 8: letzte 3 Stellen 0 oder durch 8 teilbar (ER)
- durch 9: Quersumme durch 9 teilbar (QR)
- durch 11: alternierende Quersumme, beginnend mit „-“ durch 11 teilbar (QR)

Folgende zahlentheoretischen Aussagen für Schüler verständlich, jedoch in der Wissenschaft ungeklärt:

2.9.2 Goldbachsche Vermutung

Jede gerade Zahl (>2) kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

2.9.3 Verteilung von Primzahlen

Man kann zwar beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, aber niemand kennt deren genaue Verteilung.

2.9.4 Motivation (Teilbarkeitsrelation)

Wichtige Rolle

- für VR (Teilbarkeitsregeln)
- für Bruchrechnung und Algebra
- für Strukturierug von $\mathbb{N}$
- für höhere Mathematik

2.9.5 Definition Teilbarkeit

$a \mid b \iff b = k \cdot a \;\forall\; a, b \in \mathbb{N}\ (k \in \mathbb{N})$ $\qquad$ $\left(\text{VORSICHT: } a \mid b \neq \frac{a}{b}\right)$

$\forall\, a \in \mathbb{N}\colon\ 1 \mid a\ ,\ a \mid a\ ,\ a \mid 0\ ,\ 0 \nmid a$

2.9.6 Definition Teilermenge

Für eine Zahl n heißt die Menge $T(n) = \left\{a \;\middle|\; a \mid n\right\}$ Teilermenge von n.

Bemerkung: $T(0) = \mathbb{N}$

2.9.7 Definition Primzahl

Hat $T(n)$ genau zwei Elemente, so heißt n Primzahl.

Bemerkung: 1 ist keine PZ, da $\#T(n) = 1$

2.9.8 Satz (Teilbarkeit bei Summen)

$a \mid b \;\wedge\; a \mid c \implies a \mid (b + c)$

2.9.9 Satz (Teilbarkeit bei Differenzen)

$a \mid b \ \wedge \ a \mid c \ , \ b > c \implies a \mid (b - c)$

2.9.10 Satz (Teilbarkeit bei Vielfachen)

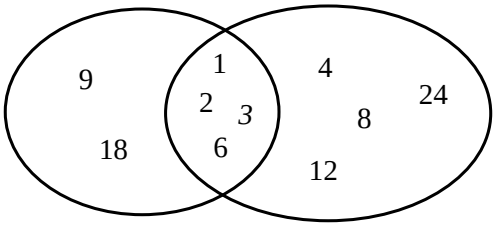
$a \mid b \implies \forall\, n \in \mathbb{N}\colon a \mid (n \cdot b)$

2.10 ggT und kgV

2.10.1 ggT und seine Visualisierung

$n, m \in \mathbb{N}$: $T(n) \cap T(m)$ gemeinsame Teiler von $n \ \wedge \ m$; $\max\Big(T(n) \cap T(m)\Big) = \mathrm{ggT}(n, m)$

Visualisierung: $\mathrm{ggT}(18, 24) = 6$



2.10.2 Definition Menge der Vielfachen, kgV

Die Menge $V(n) = \Big\{k \cdot n \ \Big| \ k \in \mathbb{N}\Big\}$ zu einer Zahl n heißt Menge der Vielfachen von n.

$\min\Big(V(n) \cap V(m)\Big) = \mathrm{kgV}(n, m)$

2.10.3 Zusammenhang kgV und ggT

$\mathrm{ggT}(n, m) \cdot \mathrm{kgV}(n, m) = n \cdot m$

2.10.4 Definition Teilerfremdheit

a, b teilerfremd $\iff \mathrm{ggT}(a, b) = 1$

2.11 Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie - Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl kann eindeutig (bis auf Reihenfolge) als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Jeder Faktor des Primzahlproduktes einer Zahl n heißt Primfaktor von n.

Tipp: bestimme für n nur Primfaktoren kleiner als $\sqrt{n}$; falls größere Primfaktoren existieren, erhält man diese beim Teilen durch kleinere automatisch.

2.12 Teilbarkeitsregeln

(I) Endstellenregeln

$\rightsquigarrow$ letzte Ziffer(n)

(II) Quersummenregeln

$\rightsquigarrow$ funktioniert wegen Teilbarkeit von Summen

(III) zusammengesetzte Teibarkeitsregeln

x durch z teilbar, wenn $z = a \cdot b$ (a, b teilerfremd) $\wedge \left(a \,\middle|\, x \wedge b \,\middle|\, x\right)$

(IV) alternierende Quersummenregel

$\rightsquigarrow$ für Zahl 11: Ziffern abwechselnd subtrahiert und addiert

III Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen

3.1 Darstellungsarten (Blatt 6, Aufgabe 1)

- gewöhnlicher (gemeiner) Bruch: $\frac{a}{b} \; \forall \; a, b \in \mathbb{Z}$
- Dezimalbruch: $0,357 = \frac{357}{1000}$
- rationale Zahl: alles, was sich als Bruch darstellen lässt
- Stammbruch: Brüche mit Zähler 1 $\frac{1}{a}$
- gleichnamige Brüche: Brüche mit gleichem Nenner
- gemischter Bruch: unechter Bruch; Darstellung als Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruchs $1\frac{5}{7}$
- Bruchgrundform (Kernbruch): maximal gekürzter Bruch
- echter Bruch: $n > z$ mit $n \nmid z$
- unechter Bruch: $n < z$ mit $n \nmid z$
- uneigentlicher Bruch: z Vielfaches von $n \rightsquigarrow z = k \cdot n$ („Scheinbruch“)

3.2 Vor- und Nachteile von Dezimalzahlen und Brüchen (Blatt 7, Aufgabe 4)

Dezimalzahlen

+ Alltagsverwendung (Preise, Größe etc.)
+ natürliche Erweiterung des Stellenwertsystems
+ Erleichterung mancher Operationen
– Veranschaulichung schwierig

Bruchzahlen

+ aus Alltagssprache bekannt
+ gute Veranschaulichung
+ Voraussetung für Algebraunterricht ab Klasse 7
– selten im Alltag verwendet

3.3 Lehrplaninhalte (Reihenfolge)

Realschule / Hauptschule / Gymnasium G9

- Erweiterung des Zahlenbereichs zur Menge $\mathbb{Q}_0^+$
- Rechnen mit $\mathbb{Q}$
- Dezimalbrüche und Rechnen damit
- Einführung negativer und ganzer Zahlen

Gymnasium G8

- $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$
- Vorteil: „künstlicher Zahlbereich“ $\mathbb{Q}_0^+$ muss NICHT geschaffen werden

$\rightsquigarrow$ innerhalb der Brüche: zuerst gemeine Brüche, dann Dezimalbrüche

3.4 mathematischer Bruchzahlbegriff

- Konstruktion von Brüchen als Tupel natürlicher Zahlen
- Definition einer Äquivalenzrelation ($\rightsquigarrow$ Äquivalenzklassen)
- Menge der Bruchzahlen wird oft mit $\mathbb{B}$ bezeichnet
- Wertgleichheit (=Gleichheit der Äquivalenzklassen) über Gleichheitszeichen verdeutlichen
  $\left\{(a,b) \;\middle|\; a,b \in \mathbb{N} \text{ mit } 3b = 4a\right\} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \left\{(a,b) \;\middle|\; a,b \in \mathbb{N} \text{ mit } 9b = 12a\right\}$
- Wertgleichheit $\neq$ Objektgleichheit $\qquad \frac{1}{2} = 0,5$
- Illustration von Bruchzahlen am Zahlenstrahl möglich

3.5 Permanenzprinzip

Charakteristisch für $\mathbb{N}$

- Rechnen
- Anordnung
- Darstellung am Zahlenstrahl
- Benennung durch Größen

$\Longrightarrow$ trifft auch auf Brüche zu $\Longrightarrow$ heißen auch Zahlen

3.6 Grundvorstellung von Brüchen

- Teil eines Ganzen
- Maßzahl
- Operator
- Quotient
- Verhältnis
- Lösung einer Gleichung
- Skalenwert

- „Quasikardinalzahl“
- Relationsaspekt
- Rechenzahl

3.7 Konzepte zur Einführung

Bruchzahl als ...

... Äquivalenzklasse (Äquivalenzklassenkonzept)

... Lösung einer linearen Gleichung (Gleichungskonzept)

... Größe (Größenkonzept)

... Funktion / Operator (Operatorkonzept)

$\rightsquigarrow$ Brüche mit Einheiten, Flächen etc. abstrahieren

3.7.1 Vorteile des Größenkonzepts

\+ man „sieht“ Brüche

\+ Ganzes $\not\leftrightarrow$ konkrete Größe (nicht zwingend Korrespondenz nötig)

\+ besser für Anteilsvorstellung

\+ später: Veranschaulichung Erweitern/Kürzen, Anordnung, Addition/Subtraktion

3.8 Erweitern und Kürzen

Erweitern

- Wertgleichheit mit Größenkonzept veranschaulichen
- Erweitern durch Falten

3.9 Größenvergleich

(1) Bestimmung HN und Erweiterungszahlen

(2) Erweitern der Brüche

(3) Vergleich der Zähler

$\rightsquigarrow$ Größenvergleiche von gleichnamigen Brüchen und Stammbrüchen wichtig

$\rightsquigarrow$ kombinierte Betrachtung von Zähler und Nenner (ggf. am Zahlenstrahl)

3.10 Addition und Subtraktion von Brüchen

- zuerst gleichnamige Brüche, später ungleichnamige Brüche ($\rightsquigarrow$ HN)
- Größenkonzept: Bezug auf konkretes Ganzes $\Longrightarrow$ Vorstellung, dass NUR Zähler addiert bzw. subtrahiert werden
- an Beispielen (z. B. Torte)
- Abstraktion (z. B. Zahlenmauern)
- Schülerfehler: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}$ $\Longrightarrow$ mangelndes Verständnis
- Subtraktion als Umkehroperation zur Addition
- Einführung auf problemorientiertem Weg möglich (3 Freunde essen Pizza ...)

3.11 Multiplikation und Division von Brüchen

3.11.1 Multiplikation wird in drei Fälle unterteilt

- natürliche Zahl mal Bruch (Additionsvorstellung) $\rightsquigarrow$ einfachster Fall
- Bruch mal natürliche Zahl (Von-Vorstellung) $\rightsquigarrow$ Operatorkonzept
  $\rightsquigarrow$ man kann nicht davon ausgehen, dass das Kommutativgesetz angewendet wird
- Bruch mal Bruch (Von-Vorstellung)

3.11.2 Schülerfehler bei der Multiplikation

- schematisches Übertragen der Additionsregel: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$
- Verwechslung mit Erweitern: $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$

3.11.3 Division

- Bruch durch natürliche Zahl
  - Anknüpfen an Quotientenaspekt: $\frac{6}{5} : 3 = \frac{6:3}{5} = \frac{2}{5}$
  - mit Kehrbruch multiplizieren: $\frac{5}{9} : 2 = \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} : 2 = \frac{(5 \cdot 2):2}{9 \cdot 2} = \frac{5}{18}$

  - Visualisierung mit Schokolade möglich

- Bruch durch Bruch
  - passt-in-Vorstellung
  - geschickte Rechenoperation

    $a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n) \implies \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (\frac{a}{b} \cdot d) : (\frac{c}{d} \cdot d) = \frac{a \cdot d}{b} : c = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

    $\implies$ Ableitung der Kehrwertregel

IV Dezimalbrüche

4.1 Arten von Dezimalbrüchen

- endliche (abbrechende) Dezimalbrüche (0,2)
- unendliche periodische Dezimalbrüche $(1,333\ldots = 1,\overline{3})$
- unendliche gemischt periodische Dezimalbrüche (4,264555...)
- unendliche nicht-periodische Deziamlbrüche (3,132463)

  $\rightsquigarrow$ bzw. Dezimalschreibweise von $\sqrt{2}$ oder π

$\rightsquigarrow$ Dezimahlzahl ist Überbegriff von Dezimalbruch

$\rightsquigarrow$ Sprechweise beachten

$\rightsquigarrow$ in der GS wurde die Regel „Komma trennt Einheiten ab“ eingeführt $1,23\text{kg} = 1\text{kg } 230\text{g}$

4.2 Erweitern und Kürzen

hinter dem Komma 0 dranhängen oder weglassen

4.3 Größenvergleich

- Rückgriff auf Größen ($\longrightarrow$ Einheiten)
- Rückgriff auf Zehnerbrüche
- Rückgriff auf Stellenwerte
- Rückgriff auf Zahlenstrahl

4.3.1 Schülerfehler beim Größenvergleich (Blatt 7, Aufgabe 3a)

(1) kein Komma Strategie: $0,38 < 0,246$, denn $38 < 246$

(2) Komma trennt: $3,2 < 3,15$, denn $3 = 3$ und $2 < 15$

(3) Nullstrategie: $3,900 < 3,80 < 3,214$

(4) Anzahl der Dezimalen Strategie: $0,715 < 0,05$

4.4 Umrechnung zwischen Bruchzahldarstellungen (Blatt 8, Aufgabe 3)

- für $\frac{9}{10}$ etc. klar (wechselseitig)
- durch Erweitern und Kürzen
- durch Division: $\frac{a}{b} = a : b \implies$ Division mit Rest muss bekannt sein
- Neunerbrüche

4.5 Dezimalbruchdarstellungen (Blatt 8, Aufgabe 4)

gekürzter Bruch mit $n > 1$

- endliche Dezimalbruchentwicklung $\iff$ n hat NUR die Primfaktoren 2 und 5
- rein periodische Dezimalbruchentwicklung $\iff$ n hat weder Primfaktor 2 noch 5
- gemischt periodische Dezimalbruchentwicklung $\iff$ n hat Primfaktor 2 oder 5 und einen weiteren $\neq 2, 5$
- Neunerbrüche: $0,\overline{1} = \frac{1}{9}$, $0,0\overline{1} = \frac{1}{90}$, $0,\overline{01} = \frac{1}{99}$ etc. (Blatt 8, Aufgabe 2)

MERKE: $\mathbb{Q}$ = gewöhnliche Brüche = endliche und periodische Dezimalbrüche

4.6 Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen

- Permanenzprinzip: Fortführung der Addition und Subtraktion von natürlichen Zahlen
- U-Schema: Zurückführung auf Brüche

$$\begin{array}{ccc} 2,35 + 0,4 & = & 2,75 \\ \downarrow & & \uparrow \\ \frac{235}{100} + \frac{4}{10} & \longrightarrow & \frac{275}{100} \end{array}$$

4.7 Multiplikation und Division von Dezimalbrüchen

- Rückgriff auf Größen, Stellenwerttafel und Zehnerbrüche
- U-Schema

$$\begin{array}{ccc} 2,35 \cdot 0,4 & = & 0,94 \\ \downarrow & & \uparrow \\ \frac{235}{100} \cdot \frac{4}{10} & \longrightarrow & \frac{940}{1000} \end{array}$$

4.7.1 Reihenfolge im Unterricht

(1) Multiplikation mit 10er Potenzen

- Größen
- Stellenwerttafel
- Zehnerbrüche

(2) Multiplikation mit natürlicher Zahl

- wiederholte Addition

(3) Multiplikation zweier Dezimalbrüche

- Anzahl der Nachkommastellen schwer zu erfassen
  - $\rightsquigarrow$ ungewöhnlich, dass Zahl beim Multiplizieren kleiner wird
  - $\rightsquigarrow$ Von-Ansatz $\longrightarrow$ Erklären des Verkleinerns, U-Schema

Division analog zur Multiplikation

4.8 Einführung ins Bruchrechnen - Reihenfolge (Blatt 9, Aufgabe 1)

(1) Brüche anschaulich darstellen und zeichnen

(2) Kürzen und Erweitern

(3) Bruchzahlen ordnen und vergleichen (Zahlenstrahl, Hauptnenner)

(4) Addition und Subtraktion

(5) Multiplikation und Division

(6) Unterscheidung echter und unechter Brüche und gemischter Zahlen

(7) Dezimalbrüche einführen

(8) Umrechnung Bruchzahl - Dezimalzahl

(9) Rechnen mit Dezimalbrüchen

Fazit

- Beginn mit gewöhnlichen Brüchen, später Dezimalbrüche
- Darstellung von Brüchen, danach Rechenoperationen
- Addition und Subtraktion, danach Multiplikation und Division
  $\rightsquigarrow$ zuerst gleichnamige, danach ungleichnamige gewöhnliche Brüche
- Kürzen und Erweitern kommt VOR der Ordnungsrelation

V Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

5.1 Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$

- Konstruktion aus $\mathbb{N}$: Die durch (a, b) repräsentierte Klasse wird mit $[a, b]$ bezeichnet
  (Einführung Äquivalenzrelation wie bei Brüchen) $\quad a - b = c - d \iff a + d = b + c$
- Motivation
  - $\rightsquigarrow$ Wo liegen die neuen Zahlen? (Zahlenstrahl)
  - $\rightsquigarrow$ Was können die neuen Zahlen? (Gleichungen)
- Sonderrolle der Null
  - offiziell: $0 \notin \mathbb{N}$
  - Ordnungszahl und Kodieraspekt NICHT sinnvoll
  - Kardinalzahl- und Maßzahlaspekt schon sinnvoll
  - Null bereits seit Klasse 1 bekannt, sonst könnte man ...
    (a) $7 - 7 =?$ nicht rechnen, aber dies ist logisch
    (b) Zahlenstrahl nicht vernünftig zeichnen
    (c) für 304 keine Ziffer für die Zehnerstelle schreiben

5.2 Kontextmodelle für $\mathbb{Z}$

- Temperaturskala
- Guthaben und Schulden (Bankkonto)
- Höhen- und Tiefenangaben (Landkarte, Aufzug)

5.3 Repräsentation vs. Kontext

Repräsentation = ein und dieselbe Sache nur anders dargestellt

Kontext = Sachsituation

5.4 neue Begriffe

- „Vorzeichen“: negative, positive Zahlen
- „Betrag“ einer Zahl und „Gegenzahl“
- neue Rechenregeln

5.5 Hintergrundwissen zum Vorzeichen

Die drei verschiedenen Bedeutungen des Minuszeichens

- Rechenzeichen (etwas abziehen)
- Vorzeichen (Zuschreibung von negativ)
- Invertierungszeichen (Vorzeichen ändern)

$\rightsquigarrow$ 3 verschiedene Orte auf dem Taschenrechner

Schülerfehler: $|a| = -a$ ist immer falsch

- Schüleraussage nur für $a > 0$ korrekt
- Schüler sieht „-“ als Vorzeichen; kann aber auch ein Invertierungszeichen sein
- aus selbigem Grund kann auch $\sqrt{-a}$ wohldefiniert sein

5.6 Wanderregel für Addition und Subtraktion

Modell „Zustand - Änderung - Zustand“

Goldene Wanderregel

(1) ersetze zwei nebeneinander stehen Zeichen immer durch eins

(2) erste Zahl = Startpunkt auf der Zahlgeraden

(3) Rechenzeichen gibt Richtung an

(4) zweite Zahl = Anzahl der Schritte

Modell „Änderung - Änderung - Änderung“ (Blatt 9, Aufgabe 3)

(1) Ausgangspunkt ist die Null

(2) Vorzeichen der ersten Zahl = Richtung

(3) erste Zahl = Anzahl der Schritte von Null ausgehend

(4) Rechenzeichen gibt Richtung von neuem Punkt aus an

(5) zweite Zahl = Anzahl der Schritte von neuem Punkt aus

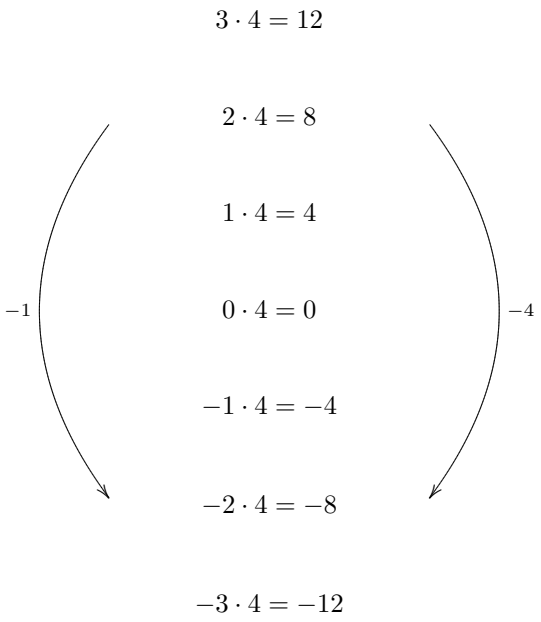
(6) Ergebnis = Schritte von Null zum Endpunkt

5.7 Addition und Subtraktion

- uneingeschränkt möglich
- Aufgaben wie „Erfinde eine Rechengeschichte über Kontobewegungen und berechne.“ macht Schülern Spaß

5.8 Multiplikation und Division (Blatt 9, Aufgabe 4)

Möglicher Einstieg zur Multiplikation: Permanenzreihen - Schüler entdecken selbst



5.9 Veranschaulichung der Regeln von Addition und Multiplikation

