Stochastik

(Didaktik der Mathematik)

SS 2012

(Georg Bruckmaier)

Juliane Wutz / Julian Palme

(Stand: 16. Juli 2012)

1 Mathematische Leitideen

(1) Zahl

(2) Messen

(3) Raum und Form

(4) Funktionaler Zusammenhang

(5) Daten und Zufall

- graphische Darstellungen und Auswertung von Tabellen
- Planung statistischer Erhebungen
- systematische Sammlung von Daten, Erfassung in Tabellen und graphische Darstellung
- Interpretation der Daten unter Verwendung von Kenngrößen
- Reflexion und Bewertung von Argumenten (basierend auf Datenanalyse)
- Beschreibung von Zufallserscheinungen in Alltagssituationen
- Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten

2 Mathematische Kompetenzen

(1) mathematisch argumentieren

(2) Probleme mathematisch lösen

(3) mathematisch modellieren

(4) mathematische Darstellungen verwenden

(5) Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen

(6) Kommunizieren

3 Anforderungsbereiche

(I) Reproduzieren

Wiedergabe und direkte Anwendung von bekanntem Wissen und eingeübten Verfahren

(II) Zusammenhänge herstellen

Verknüpfung von Wissen und Fähigkeiten aus verschiedenen Gebieten der Mathematik

(III) Verallgemeinern und Reflektieren

Finden eigener Lösungen/Begründungen/Wertungen/Problemformulierungen

- G8: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung schon ab Klasse 5
- optische Manipulation von Statistiken: z. B. abknickende x-Achse oder y-Achse abschneiden
- beachte: Prozentpunkte oder Prozent

  Bsp: 40 von 1000 $\longrightarrow$ 50 von 1000

  $\rightsquigarrow$ relative Erhöhung 1 Prozentpunkt

  $\rightsquigarrow$ absolut von 4 % auf 5 % $\hat{=}$ 25 % Erhöhung

4 empirischer Forschungsprozess

Wissenschaftliche Untersuchung von

- Problemstellung / Forschungsfrage
- Planung der Erhebung
  - Operationalisierung (wie messen?)
  - Design (wer, wie, wann)
- Datenerhebung
- Auswertung
- Interpretation
- vertiefende Schlussfolgerungen

5 Daten

- systematisch beobachtete Informationen
- liegen in numerischer Form vor
- Grundlage für Beantwortung bestimmter Fragen

  $\rightsquigarrow$ vor Beantwortung Darstellung und Interpretation der Daten nötig

5.1 formale Definition

Ein Paar (Merkmalsträger , Merkmalsausprägung) nennt man „statistisches Datum“ $\longrightarrow$ z. B. (Berg Y , Höhe h)
gemessen werden:

- Merkmale
- Konstrukte
- (abhängige) Variable

6 Operationalisierung

gibt an, was jemand tun muss um als z. B. ängstlich zu gelten $\Longrightarrow$ „Messdefinition“ notwendig

7 Skalen

- numerisch (1-10)
- verbal (ja, nein, vielleicht)
- symbolisch (☺)

7.1 Skalenplanung - numerisch

- unipolar 1 2 3 4 5 6 7
- bipolar -3 -2 -1 0 1 2 3
- „ohne Mitte“ (forced choice) 1 2 3 4 5 6

7.2 Ratingskalen

Vorteile

+ standardisierte Fragen und Antworten
  $\rightsquigarrow$ hohe Interpretier- und Vergleichbarkeit der Daten
+ einfache, schnelle Druchführung
+ keine individuelle Auswertung nötig

+ objektive Durchführung und Auswertung

+ bequeme Analyse und Darstellung

Nachteile

– Tendenz zur Mitte (Vermeidung durch forced choice)

– Boden- und Deckeneffekte: äußerste Kategorien erfassen besonders extreme Personen evtl. nicht richtig

– unmotivierte Versuchspersonen: evtl. zufälliges Ankreuzen

– Suche nach Mustern

– Prüfung der Plausibilität

8 Standardisierung

8.1 . . . der Fragen

- (voll) standardisiert: Festlegung nach Wortlaut und Abfolge
- nicht standardisiert: konkrete Fragen bzw. Gesprächsführung bleiben offen

8.2 . . . der Antworten - Antwortformat

nur möglich bei standardisierten Fragen

- feste (geschlossene) Antworten:
  - Vorgabe der Antwortmöglichkeiten durch Ratingskalen
  - Ankreuzen
  - festgelegte numerische Skala (einfache Auswertung!)
- offene Antworten:
  - keine Einschränkungen
  - Protokollierung schwierig
  - Auswertung komplex
  - auch in schriftlichen Fragebögen möglich

8.3 Was sind gute Fragen?

- einfach formuliert
- eindeutig interpretierbar
- nicht suggestiv
- nicht zu allgemein
- auf Sachverhalt gerichtet
- potentiell beantwortbar
- angemessene Antwortvorgabe
- sollen Befragten nicht in Verlegenheit bringen

9 Kategorienbildung

9.1 Antwortverhalten

- Kategorienlabel (z. B. trifft eher zu)
- Kategorienausprägung (z. B. 3)

9.2 Eigenschaften von Kategorien

- Exaktheit $\longrightarrow$ exakte Definition
- Exklusivität $\longrightarrow$ Kategorien müssen sich gegenseitig ausschließen
- Exhaustivität $\longrightarrow$ Kategorien müssen Konstrukt erschöpfend beschreiben (ggf. „Sonstiges“)

9.3 Arten von Kategorien

- „natürliche“ Kategorien (Geschlecht, Geburtstag, Bundesland etc.)
- VOR der Erhebung festgelegte Kategorien (Ratingskalen, Alter in Jahren etc.)
- ggf. Zusammenfassung in größere Kategorien (Klassen) NACH Erhebung (Schulnoten, Körpergrößen etc.)

10 Test $\longleftrightarrow$ Fragebogen

- (objektiver) Test: „normativ richtige“ Antwort
- (subjektive) Fragebögen: Antwort personenabhängig
- Oberbegriff für Bearbeitungsaufforderung: Item

11 Gütekriterien

- Objektivität: Messergebnis sollte unabhängig sein von
  (a) der durchführenden Person
  (b) der auswertenden Person (Auswertungsobjektivität)
- Validität: Gültigkeit der Messung (wird das richtige gemessen?)
- Reliabilität: Genauigkeit der Messung
  Reliabilitätserhöhung: Erhöhung der Anzahl

100%ige Erfüllung der drei Gütekriterien meist nicht realistisch, nur Optimierung

12 Listen

- Urliste: gibt Beobachtungen in Reihenfolge des Auftretens wieder
- Strichliste: ordnet Daten und fasst sie zusammen

13 Deskriptive Statistik

- versucht Daten zu einzelnen Merkmalen möglichst prägnant und aussagekräftig wiederzugeben
  - tabelarisch - Häufigkeitstabelle
  - grafisch - Diagramme
  - Angabe von Kennwerten - Mittelwert, Standardabweichung
- oft schon Beantwortung einfacher Fragen möglich
- Darstellung der Daten: Eigenschaften der Verteilung stehen im Blickpunkt (nicht mehr Einzelpersonen)

14 absolute Häufigkeit (Definition)

Anzahl der Personen mit diesem Messwert in der Stichprobe

15 relative Häufigkeit (Definition)

prozentualer Anteil der Personen mit diesem Messwert, bezogen auf die Stichprobengröße n

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{n}$$

16 Diagrammarten

Säulen-, Balken-, Linien- (Kurven-), Kreis-, Streifendiagramm (Prozentstreifen), Piktogramm (Bilddiagramm)

Im allgemeinen gilt:

- Beschriftungen so wählen, dass sie auch ohne Erläuterung verständlich sind
- ggf. Legende beifügen
- möglichst aussagekräftige Achsenbeschriftungen
- Überschrift intuitiv verständlich
- Gesamtzahl n der Merkmalsträger muss immer erkennbar sein

weitere Arten: Baumdiagramm, Back-to-Back-Diagramm

---

17 Messung (Definition)

Zuordnung empirischer Strukturen zu numerischen Strukturen

numerische Struktur heißt „Skala“, beide zusammen heißen „Relation“

18 Skalenniveaus

18.1 Nominalskala

- $=$, $\neq$ (unterscheiden)
- Größenunterschiede KEINE Bedeutung

18.2 Ordinalskala

- $=$, $\neq$, $<$, $>$ (zusätzlich ordnen)
- Abstände KEINE Bedeutung

18.3 Kardinalskala (Blatt 1, Aufgabe 3)

- **Intervallskala**
  - $=$, $\neq$, $<$, $>$, $+$, $-$ (zusätzlich Abstände vergleichen, Mittelwerte bilden)
  - kein natürlicher Nullpunkt
  - keine natürliche Einheit
- **Verhältnisskala**
  - $=$, $\neq$, $<$, $>$, $+$, $-$, $\cdot$, $:$ (zusätzlich Verhältnisse vergleichen)
  - natürlicher Nullpunkt
  - keine natürliche Einheit
- **Absolutskala**
  - $=$, $\neq$, $<$, $>$, $+$, $-$, $\cdot$, $:$ (zusätzlich Verhältnisse vergleichen)
  - natürlicher Nullpunkt
  - natürliche Einheit

---

19 richtige Diagrammart

- Ordinal-, Intervall-, Verhältnisniveau: Säulen-, Balken-, evtl. Kurvendiagramm
- Nominaldatenniveau: Tortendiagramm

  $\rightsquigarrow$ z.T. kleine Unterschiede im Säulendiagramm besser darstellbar

- bei Dichotonien (2 Antworten) Diagramme oft überflüssig

20 in Diagrammen selbst

(1) Schraffuren vermeiden

(2) 3-dim Darstellung vermeiden

(3) Kurven/Säulen IMMER wichtiger als Raster/Gitter

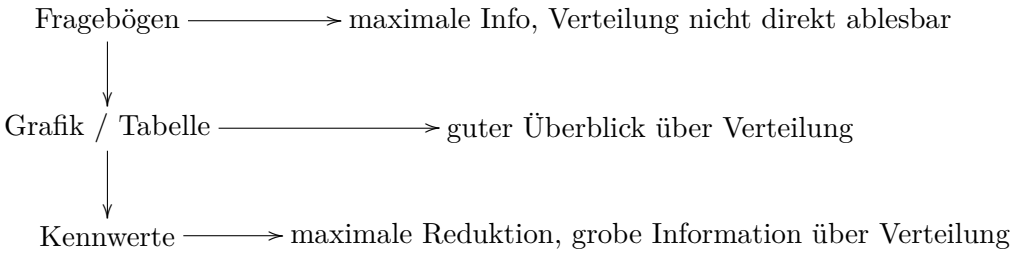
(4) nominale Merkmale: Anordnung nach Häufigkeit besser für Überblick über Reihenfolge

- Häufigkeiten in Piktogrammen als Flächeninhalt dargestellt

  $\rightsquigarrow$ Gesamtinhalt muss den Prozentverhältnissen entsprechen

- Auswahl der Bilder kann Botschaft verfälschen

21 Datenreduktion



22 Kennwerte

22.1 arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) : n$$

- aM aus Werten ist genauer als aus Klassen
- Eigenschaften
  - Summe der einfachen Abweichungen von aM ist 0
  - Summe der quadratischen Abweichungen ist minimal

  - besonders geeignet zur Beschreibung symmetrischer Verteilungen

    $\rightsquigarrow$ Gleich-, Normalverteilung

- je weniger Symmetrie der Verteilung, desto ungeeigneter ist aM

22.2 Median (Zentralwert)

... erhält man bei aufsteigender Anordnung der Messwerte

(1) Anzahl der Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ ungerade $\Longrightarrow$ $\exists!$ mittlerer Wert $x_m = x_{\frac{n+1}{2}}$

(2) Anzahl der Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ gerade $\Longrightarrow$ $\exists$ 2 mittlere Werte $\Longrightarrow$ $x_m = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$

Eigenschaften

- gegenüber „Ausreißern“ sehr robust
- schneller zu bestimmen als aM
- Änderung von Werten OHNE Änderung der Seite des Medians $\Longrightarrow$ KEINE Änderung des Medians

22.3 Verallgemeinerung des Medians

- Quantile = Lagepunkte einer angeordneten statistischen Verteilung
- Unterteilung der gesamten Verteilung in n Teile $\Longrightarrow$ $\exists$ $(n-1)$ Quantile ($n = 2$ nur Median)
- je nach Größe von n spricht man von Quartilen (z. B. $n = 4$) oder Perzentilen ($n = 100$)

22.4 Modalwert (Modus)

... ist diejenige Merkmalsausprägung/Kategorie bei einer Häufigkeitsverteilung, die am häufigsten auftritt.

$h(x_{\text{mod}}) = \max\limits_{x_i}\Big(h(x_{\text{mod}})\Big)$

$\longrightarrow$ Antwort auf Frage nach dem „Gipfel“ der Verteilung

---

22.5 harmonisches Mittel

$$x_n = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \quad \text{mit } x_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ Messwerte}$$

Kehrwert aus der Summe der Kehrwerte

22.6 geometrisches Mittel

$$x_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

---

23 Kennwert - Skalenniveau

	Nominal∼	Ordinal∼	Intervall∼	Verhältnis∼
Modalwert	X	X	X	X
Median		X	X	X
arithmetisches Mittel			X	X
geometrisches Mittel				X
harmonisches Mittel				X

24 Streuungsmaße

24.1 Spannweite

...ist die Differenz zwischen größtem und kleinstem vorkommenden Merkmalswert.

$$w = \max_i(x_i) - \min_i(x_i)$$

24.2 mittlere absolute Abweichung (vom Median)

...ist das aM aus den absoluten Abweichungen der Messwerte x_i vom Median x_m.

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_m|}{n}$$

24.3 Standardabweichung und Varianz

Varianz s^2 ist die mittlere quadratische Ableitung der Messwerte x_i vom aM.

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Standardabweichung ist die Quadratwurzel aus der Varianz: $s = \sqrt{s^2}$ (≥ 0 per Def)

Diese beiden Streuungsmaße werden am häufigsten verwendet.

25 Schiefe der Verteilung (Kurtosis)

- Maß für die Schiefe: $SC = \bar{x} - x_m$
- $SC = 0 \implies$ Symmetrie
- $SC > 0 \implies$ Linkssteil (=Rechtsschief) $\rightsquigarrow$ Median liegt im linken Teil des Boxplots
- $SC < 0 \implies$ Rechtssteil (=Linksschief)

$\rightsquigarrow$ Regel gilt NICHT IMMER!

26 Qualitativer Überblick über mögliche Verteilungen

- Rechtssteil
- Linkssteil
- Mehrgipflig
- Zweigipflig (bimodal)
- symmetrische Verteilung I: Gleichverteilung
- symmetrische Verteilung II: Normalverteilung (Gauß)
- symmetrische Verteilung III: spitzer Gipfel

27 Statistiken

- univariante Statistik: ein Merkmal
- multivariante Statistik: mehrere Merkmale

28 Cronbachs α

- Reliabilitätsmaß, um zu prüfen, ob Items tatsächlich das gleiche Konstrukt messen
- $-1 \leq \alpha \leq 1$; ist α größer als bestimmter Schwellenwert $\longrightarrow$ Konstrukt wurde von Items reliabel gemessen
- α ist Maß für interne Konsistenz

29 Hypothese

Begründete Vorannahme bezüglich Forschungsfrage

- bisher: ein Merkmal / eine Stichprobe
- Merkmal kann auch für mehrere Subgruppen / mehrere Variablen für eine Gruppe gemessen / betrachtet werden
- Unterschiedshypothese: frm[o]– Merkmal , 2 Gruppen
- Zusammenhangshypothesen: 2 Merkmale , 1 Gruppe

30 Variablen

$cbnqd_2$: meine Kollegen sagen mir, dass ich gut bin, in dem, was ich mache

$cbnqe_2$: Ich fühle mich bei der Arbeit unter Druck

- heißen z. B. Analysemerkmale oder abhängige Variablen
- Geschlecht und Schulform z. B. nennt man gruppierende Variablen oder unabhängige Variablen

31 Probleme bei der Deutung von Mittelwerten

(1) absoluter Mittelwertsunterschied nur mit Kenntnis der Gesamtskala interpretierbar

(2) bei kleinen Streuungen Mittelwertsunterschied (statistisch) bedeutsam

(3) bei großen Streuungen 2 flache sich überschneidende Berge $\longrightarrow$ selber Mittelwertunterschied weniger bedeutsam

32 Effektstärke (Effektgröße)

Gruppenunterschied wird an Standardabweichung der Gesamtstichprobe „relativiert“

$$d = \frac{\bar{x}_{\text{Subgruppe 1}} - \bar{x}_{\text{Subgruppe 2}}}{s_{\text{Gesamtstichprobe}}}$$

- $d = 0 \longrightarrow$ kein Effekt
- $d = 0,2 \longrightarrow$ kleiner Effekt

- $d = 0,5 \longrightarrow$ mittlerer Effekt
- $d = 0,8 \longrightarrow$ großer Effekt

d unabhängig von absoluten Mittelwerten und Streuungen! Beachte:

- Vorzeichen
- Welche Gruppe ist 1, welche 2?
- Welche Richtung auf Skala „erwünscht“?

33 Signifikanztest

... betrachtet Wahrscheinlichkeit, die in der Stichprobe gefundenen Gruppenunterschiede (oder noch extremeren) „nur zufällig“ enthalten zu haben, obwohl in Wahrheit in der Population eigentlich gar kein Unterschied besteht.
Diese Wahrscheinlichkeit nennt man „p-Wert“.
Wahrscheinlichkeit klein $\Longrightarrow$ Verwurf des Zufalls als Ursache für gefundenen Unterschied $\Longrightarrow$ Annahme des Unterschiedes in der Population $\Longrightarrow$ Verwurf der Gegenhypothese (kein Unterschied) (Nullhypothese)

- $p < 0,05 \longrightarrow$ signifikant
- $p < 0,01 \longrightarrow$ sehr signifikant
- $p < 0,001 \longrightarrow$ hoch signifikant

Kritik

(1) Konzept auch für „Profis“ nur schwer verständlich

(2) oft in Sozialwissenschaft verwendet, obwohl andere Methoden geeigneter wären

(3) Signifikanz abhängig von Stichprobengröße

34 Zusammenhang zweier Merkmale

34.1 4-Felder-Tafel

- 2 dichotome Merkmale

- Erstellung mit absoluten- oder relativen Zahlen

  $\rightsquigarrow$ relative Werte $\Longrightarrow$ mehr Probleme

34.2 Streudiagramme

Jede Person anhand zweier Messwerte durch einen Punkt im KoSy repräsentiert.

34.3 Korrelation

Maß für linearen Zusammenhang ($-1 < r < 1$)

- je genauer Punkte aus Streudiagramm zu Gerade „passen“, desto größer der Zusammenhang
- je näher r bei $|1|$ liegt, desto deutlicher der Zusammenhang
- $r = |1| \implies$ Gerade

34.3.1 Korrelationskoeffizient nach Bravis und Pearson

2 intervallskalierte Merkmale X und Y , zugehörige standardisierte Datenreihen $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$

$$r := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Frage: Korrelations „bedeutsam“ von Null verschieden?

- über Effektstärke
  - $d_r = r$

    $\rightsquigarrow$ $r = 0,1 \longrightarrow$ kleiner Effekt

    $\rightsquigarrow$ $r = 0,3 \longrightarrow$ mittlerer Effekt

    $\rightsquigarrow$ $r = 0,5 \longrightarrow$ großer Effekt
- Signifikanztest

  Nullhypothese: $\nexists$ Zusammenhang zwischen beiden Merkmalen in der Population

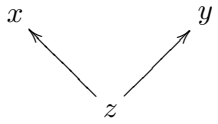
35 Regressionsgrade

Gerade, die am besten zu einem (als linear angenommenen) Zusammenhang passt.

36 Kriterium der „kleinsten Quadrate“

- Summe der Quadrate der Abweichungen $u_i = y_i - \hat{y}_i$ soll möglichst klein werden.
- y_i = tatsächlich gemessener Wert der Person i (zu x_i)
- $\hat{y}_i$ = von der Regressionsgeraden zu x_i vorhergesagter y-Wert $(\hat{y} = a + bx)$
- Berechnung der Regressionskoeffizienten mit $\sum x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$

37 Korrelation und Kausalität

- $x \longrightarrow y$ Merkmal x hat Kausalwirkung auf y
- $x \longleftarrow y$ Merkmal y hat Kausalwirkung auf x
- 

weiteres Merkmal z wirkt simultan auf x und y (Hintergrundvariable)

Mit Korrelation lassen sich KEINE Kausalitäten beweisen, aber vermutete lineare Zusammenhänge widerlegen.

$$\text{Kausalität} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{Korrelation}$$

Korrelation ohne direkte Kausalbeziehung kann durch gemeinsame Hintegrundvariable entstehen.

Bsp: Korrelation Storchenzahl - Geburtenzahl mit HV: Geburtenrate Stadt - Land

Bemerkung: Kausalität: x Ursache, y kausale folge. Nur bei kausalem Zusammenhang führt Änderung von x auch zur Änderung von y.

38 Statistik in Alltag und Medien

- Täuschungen: y-Achse abschneiden, Skalierung, Verzerrung, Flächen
- keine Vorstellung von Prozent / bedingten Wahrscheinlichkeiten
  $\rightsquigarrow$ Doppelbaum mit absoluten Häufigkeiten

39 Simpson-Paradoxon

Beachte: 2 Stichproben unter gleichen Voraussetzungen vergleichen

40 Basisratenvernachlässigung

Bsp: Über die Hälfte aller Deutschen sterben im Krankenhaus $\not\Rightarrow$ im Krankenhaus ist er gefährlich

$\rightsquigarrow$ dort sind einfach mehr alte und kranke Menschen

41 Bedingung - Grund

günstige Bedingung $\neq$ Grund

Bsp: kriminelle Handlungen geschehen in der Freizeit

heißt NICHT: mehr Freizeit $\Longrightarrow$ mehr Kriminalität

42 Möglichkeit der Antwortbeeinflussung

- Einleitung zur Frage (Dramatisierung)
- Formulierung der Frage (Zusätze, unklare Begriffe)
- leichteres Bejaen als Verneinen
- Interviewleiter
- Ziel der Daten (welchem Zweck dient die erhobene Zahl?)
- Auswahl der Ergebnisse

43 Wahrscheinlichkeit vs. Statistik

43.1 Statistik

... beschreibt Vergangenheit, versucht Muster und Auffälligkeiten in Daten zu finden und Schlussfolgerungen zu ziehen.

... Erheben, Beschreiben und Interpretieren von Daten

43.2 Wahrscheinlichkeit

... schätzt Eintreten zukünftiger Ereignisse ab. Schule: „Berechnung des Zufalls“

Begriff der Wahrscheinlichkeit hat sich nach und nach entwickelt.

43.3 4 Zugangsweisen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff

(a) klassische Wahrscheinlichkeit (Laplace Wahrscheinlichkeit)

- Zufallsexperiment: alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich (Laplace-Experiment)
- $P(A) = \dfrac{\text{Anzahl der für Ereignis günstigen Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$
- theoretisch vorhergesagte relative Häufigkeit

(b) frequentistische (statistische, empirische) Wahrscheinlichkeit

- Bestimmung durch häufiges (frequentistisches) Ausprobieren (empirisch)
- bei Laplace-Experimenten nähert sich diese Wahrscheinlichkeit bei vielen Wiederholungen der Laplace-Wahrscheinlichkeit an

(c) axiomatische Wahrscheinlichkeit (Kolmogoroff)

- Axiome

  (1) $P(A), P(B) \geq 0$

  (2) $P(\Omega) = 1$

  (3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $P(A \cap B) = 0$

(d) subjektive Wahrscheinlichkeit (Thomas Bayes)

- P weder theoretisch noch frequentistisch bestimmbar
- Basis: theoretische bzw. empirische Überlegungen (nicht vollständig)

44 Weltquotient

- Glaubensgrad, dass etwas (nicht) passieren wird
- ist dieser x-mal so hoch, wie der einer anderen Person $\Longrightarrow$ Einsatz auch x-mal so hoch

  $\Longrightarrow$ fairer Weltquotient: $1 : x$

45 Eigenschaften eines Zufallsexperiments

- mögliche Ereignisse vorab bekannt
- Ergebnis eines einzelnen Experiments kann NICHT vorhergesagt werden (Zufälligkeit!)
- Experiment kann unter identischen Bedingungen wiederholt werden

46 Ergebnis und Ergebnisraum

- Ergebnisse (Elementarereignisse) $w_1, w_2 \ldots$ werden zu einer Menge $\Omega = \{w_1, w_2 \ldots\}$ zusammengefasst
- Ω heißt Ergebnisraum
- Anzahl der Ergebnisse nennen wir Mächtigkeit des Ergebnisraums: $|\Omega|$

47 Erwartungswert

. . . (einer Zufallsvariablen) ist jener Wert, der sich (i.d.R.) bei oftmaligem Wiederholen des zugrunde liegenden Experiments als aM der Ergebnisse ergibt.

47.1 Formal

Sei X eindliche Zufallsgröße, welche genau die Werte x_i mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ annehmen kann.
Dann berechnet sich der Erwartungswert nach der Formel

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

48 Ergebnisse als Mengen von Elementarereignissen

- Ergebnis $A, B, C \ldots$ kann nur entweder Elementarereignis selbst oder
- ein aus Elementarereignissen zusammengesetztes Ergebnis sein

$\rightsquigarrow$ Elementarereignisse w, Ereignisse A, B, C, Ergebnisraum Ω sind Mengen
$\rightsquigarrow$ Ereignis A ist eingetreten, wenn Ergebnis des Zufallsexperiments $w \in A$ ist

49 zusammengesetzte- oder mehrstufige Zufallsexperimente

Ausführung mehrere Teilexperimente

49.1 1. Pfadregel: Multiplikationsregel

Wahrscheinlichkeit = Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades

49.2 2. Pfadregel: Additionsregel

Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die zu einem Ereignis gehören

50 Kombinatorik

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

50.1 Zählprinzip bei zusammengesetzten Zufallsexperimenten

Experiment mit n Teilexperimenten, die unabhängig voneinander auszuführen sind und $\exists\ k_i$ mögliche Ergebnisse für das i-te Teilexperiment, dann hat das zusammengesetzte Experiment $\prod_{i=1}^{n} k_i$ verschiedene Ergebnisse.

50.2 4 grundlegende Fälle

„Ziehen von k Elementen aus einer Urne mit n Elementen“

(A) Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

$$V_{\mathrm{mW}}(n;k) = n^k$$

(B) Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge

$$V_{\mathrm{oW}}(n;k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(C) Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

$$K_{\mathrm{mW}}(n;k) = \binom{n+k-1}{k}$$

(D) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

$$K_{\mathrm{oW}}(n;k) = \binom{n}{k}$$

50.3 4 Schritte Modell

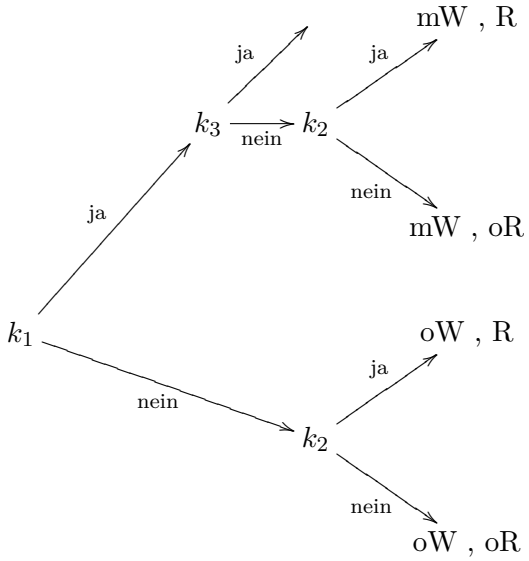
(1) mögliche spezielle Ergebnisse angeben

(2) Grundfragen stellen und beantworten: Modellbildung

k_1: sind Wiederholungen möglich?

k_2: Reihenfolge der Sequenz beachten?

$\left(k_3\text{: Vielfachheiten? } \rightsquigarrow \text{ in der Schule nicht!}\right)$



(3) Übertragung ins Modell

(4) mathematische Verarbeitung

50.4 Abzähltechniken (Kombinatorik)

... helfen bei Bestimmung von $|A|$ und $|\Omega|$, somit zur Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten

50.4.1 Möglichkeiten des Abzählens

- einfache Fälle: „genaues Hinsehen“
- unsystematisch (aufzählen)
- systematisch
- Tabelle
- Baumdiagramm
- Entscheidungsbaum

51 Ergebnisse als Mengen

- Vereinigung: $A \cup B$
- Schnitt: $A \cap B$
- A und B unvereinbar (disjunkt): $A \cap B = \emptyset$
- Gegenereignis: $\bar{A}$
- sicheres Ereignis: Ω als Ereignis
- unmögliches Ereignis: $\emptyset$ als Ereignis

52 Gesetze von Morgan

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad ; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

52.1 Veranschaulichung

- Venn-Diagramm
- Tabelle (auch: Vierfeldertafel)
- Baumdiagramm
- Einheitsquadrat (Fläche $\hat{=} P$)

53 Gesetze

- Kommutativgesetz
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- Assoziativgesetz
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C)$
- Distributivgesetz
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Gesetze für die neutralen Elemente
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap \Omega = A$
- Gesetze für die dominanten Elemente
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup \Omega = \Omega$
- Gesetze für das komplementäre Element
  - $A \cup \bar{A} = \Omega$
  - $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- Idempotenzgesetze
  - $A \cup A = A$
  - $A \cap A = A$

54 Wahrscheinlichkeiten

Ereignisse werden Verknüpft, Wahrscheinlichkeiten addiert.

Axiome

(1) $P(A), P(B) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $P(A \cap B) = 0$

- aus (3) folgt: $B = \bar{A} : P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- für p.w. unvereinbare Ereignisse $A_1, \ldots, A_m$ folgt aus (3):
  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m)$
- Additionssatz (Schule!): $(A \cap B = \emptyset) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

54.1 bedingte Wahrscheinlichkeit

... Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B bereits eingetreten ist.

... Wahrscheinlichkeit von A eingeschränkt auf den „Ereignisraum“ B.

$$P(B/A) \quad \text{oder} \quad P_B(A)$$

Für $A \cap B$ gilt:

- falls zuerst B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$
- falls zuerst A: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

54.2 Satz von Bayes

Es gilt: $P(A) \cdot P(B/A) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ und es folgt der Satz von Bayes

$$P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)}$$

55 stochastische Unabhängigkeit

A, B heißen stochastisch unabhängig, falls gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Andernfalls heißen sie stochastisch abhängig. Dann gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Im Fall des Satzes von Bayes gilt dann für unabhängige A, B:

$$P(B/A) = P(B) \quad \text{bzw.} \quad P(A/B) = P(A)$$

56 Darstellungsarten von Wahrscheinlichkeiten

- Prozent
- gewöhnliche Brüche
- absolute Haufigkeiten
- Deziamlbrüche
- Chancenverhältnisse
- „Jeder wievielte“

57 Prozent

- hundertstel
- Symbol: %
- Grundwert G , Prozentsetz P , Prozentwert W

$$W = P \cdot G$$

  mathematisch: $\%\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ p \longmapsto \frac{p}{100}$

57.1 Fehler bei der Interpretation

- „jeder x-te entspricht $x\,\%$“
- jeder 5te „besser“ als jeder 10te

58 Chance und Risiko

- Chance auf 6er im Lotto: $1 : 14\,000\,000$
- Antonym zu einer (positiven) Chance ist das (negative) Risiko
- Schülervorstellung: Chance 1:1000 bedeutet $P = \frac{1}{1000}$ $\lightning$

  $\rightsquigarrow$ RICHTIG: $P = \frac{1}{1001}$, weil 1 trifft zu und 1000 nicht (günstige zu ungünstigen)
- Problem: (subjektive Wahrscheinlichkeit) Worauf bezieht sich die Wahrscheinlichkeit?

  Bsp: 30 % Regenwahrscheinlichkeit heißt an 30 % der Tage mit vergleichbaren Wetterbedingungen regnet es

  $\rightsquigarrow$ kein Bezug auf Ort, Zeit, Fläche oder ähnliches

  $\rightsquigarrow$ Menschen haben i.A. schlechtes Wahrscheinlichkeitsdenken

59 Mammografie-Aufgabe

(bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Frauen Brustkrebs hat, beträgt 1 %. Wenn die Krankheit vorliegt, wird sie durch die Mammografie mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % erkannt („positiver Mammografie-Befund“). Jedoch auch gesunde Frauen erhalten mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,6 % fälschlicherweise einen positiven Mammografie-Befund. Eine Frau dieser Altersgruppe erhält nun einen

positiven Mammografie-Befund. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich an Brustkrebs erkrankt ist?

Lösung

B: Brustkrebs , $\bar{B}$: nicht Brustkrebs , M_+: positiver Mammografie-Befund

Satz von Bayes liefert:

$$p(B/M_+) = \frac{P(M_+/B) \cdot P(B)}{p(M_+/B) \cdot P(B) + P(M_+/\bar{B}) \cdot P(\bar{B})} = \frac{0,8 \cdot 0,01}{0,8 \cdot 0,01 + 0,096 \cdot 0,99} = 0,078 \approx 8\,\%$$

60 Linda-Aufgabe

Linda ist 32, sie hat in Philosophie promoviert und ist ausgesprochen intelligent. Sie ist sozial sehr engagiert und war früher in der Anti-Atomkraft Bewegung aktiv. Was ist wahrscheinlicher?

(a) Linda ist Bankangestellte.

(b) Linda ist Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv.

Die meisten Menschen entscheiden sich für (b), ABER:

$$P(A \text{ „und“ } B) = P(A \cap B)$$

$\rightsquigarrow$ Wahrscheinlichkeiten werden in diesem Fall nicht addiert, sondern multipliziert!

A, B **stochastisch unabhängig**	A, B **stochastisch abhängig**
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$
$P(A \cap B) < P(A)$	$P(A \cap B) < P(A)$

$\rightsquigarrow$ mit absoluten Zahlen arbeiten (z. B. auch Doppelbaum)

61 Ziegenproblem

Stellen Sie sich vor, Sie nehmen an einer Spielshow teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer 1. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet. Mit den Worten “Ich zeige Ihnen mal was” öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer 3, und eine Ziege schaut ins Publikum.

Er fragt: “Bleiben Sie bei Tür Nummer 1, oder wechseln Sie zu Tür Nummer 2?” Wie sollten Sie sich als Kandidat entscheiden?

Z Ziege , A Auto , $\boxed{}$ Wahl , $*$ öffnen

	Tor 1	Tor 2	Tor 3	
1	$\boxed{\text{Z}}$	Z^*	A	$\Longrightarrow$ Sieg durch Wechsel
2	$\boxed{\text{Z}}$	A	Z^*	$\Longrightarrow$ Sieg durch Wechsel
3	$\boxed{\text{A}}$	Z	Z	$\Longrightarrow$ Bleiben $\hat{=}$ Sieg

$\rightsquigarrow$ im Fall 3 ist es egal, welches Tor geöffnet wird (deswegen kein $*$ vorhanden)

$\Longrightarrow \frac{2}{3}$ Sieg durch Wechsel $\hat{=}$ Wahrscheinlichkeit, als erstes eine Ziege gewählt zu haben

$\Longrightarrow$ Wechsel sinnvoll