Geometriedidaktik

WS 2012/2013

(Prof. Dr. Stefan Krauss)

Juliane Wutz / Julian Palme

(Stand: 18. Februar 2013)

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung 'Didaktik der Geometrie', gelesen von Herrn Prof. Dr. Stefan Krauss im Wintersemester 2012/2013 an der Universität Regensburg. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

$\longrightarrow$ Lehre vom Anschauungsraum (Munduruku, optische Täuschungen)

$\longrightarrow$ Übungsfeld zum Problemlösen (Begründen, Argumentieren, inhaltliches Schließen, Beweisen)

$\longrightarrow$ Beispiele für deduktive Theorie

Definition

Begriffsfestlegungen für mathematische Phänomene inklusive einer genauen Beschreibung

Grundbegriffe - NICHT zu definieren

- Punkt
- Gerade
- liegt auf (Inzidenz)
- schneidet (Inzidenz)

Satz

wahre mathematische Aussage (beweisen!)

Beweis

strenge mathematische Begründung für Sätze
(Induktion, direkt, indirekt, Widerspruch ...)

Axiom

grundlegende Basisaussage

parallele Geraden

2 Geraden g, h heißen genau dann parallel, wenn sie sich NICHT schneiden oder wenn sie gleich sind

Parallelenaxiom

g Gerade und P liegt NICHT auf $g \implies \exists$ höchstens eine zu g parallel Gerade h durch P

$\rightsquigarrow$ Verzicht/Abänderung des Parallelenaxiom führt zu nicht-euklidischen Geometrien (elliptische Geometrie - Kugeloberfläche, Bierdeckelgeometrie, Taxigeometrie ...)

Gerade als Punktmenge

P liegt vor Q $(P \prec Q) \implies \exists$ Punkte R, S, T mit $R \prec P \prec S \prec Q \prec T$

Strecke

A, B Punkte. Die Menge aller X mit $A \prec X \prec B$ $(B \prec X \prec A)$ heißt Strecke $[AB]$ $\Big([BA]\Big)$

Strahl

$\Big\{X \in g \;\Big|\; A = X \text{ oder } A \prec X\Big\}$
auch Halbgerade genannt: $[AB$

Polygon

- $P_1, P_2, \ldots, P_n \in E$. Vereinigung von $[P_1, P_2], [P_2, P_3], \ldots, [P_n, P_1]$ heißt Polygon
- Strecken = Seiten
- Punkte = Ecken
- Jedes Vieleck besteht nur aus dem Rand

Vorteile der Definition über Punkte

- kurze genaue Beschreibung
- Unterscheidung Figur $\longleftrightarrow$ Maße
- Dimensionsunterscheidungen vereinfacht
- verträglich mit Abbildungsgeometrie

Winkel

- geordnetes Paar von Halbgeraden mit identischem Ausgangspunkt A heißt Winkel mit Scheitel A und Schenkeln $[AB$ und $[AC$
- vieles schon aus GS bekannt
  - Viereck
  - Quadrat
  - Spiegelung
  - Verschiebung
  - Symmetrie
  - maßstäbliches Verkleinern
  - ...
- in der Schule
  - erst entdecken, dann benennen
  - Verstehen als Vernetzung verschiedener Zugänge
  - Wichtig: Kontrastieren!

Grundlegende Begriffe in der 5. Klasse

(a) ebene Figuren aus GS
$\longrightarrow$ Wiederholung und Definition

(b) Objektgrundbegriffe: Punkt, Gerade usw. eingeführt und anschaulich erläutert

(c) Beziehungsbegriffe: parallel, senkrecht

(d) Winkelbegriff

Im Schulbuch oft „Linie“ $\longrightarrow$ kein Bezug zur Punktmenge

Wichtig: $[AB]$ Strecke als Objekt vs. $\overline{AB}$ Länge

senkrecht

- bei Schnitt 4 rechte Winkel

- Achsenspiegelung $\longrightarrow$ Deckung mit Bild
- Drehung, die gleichzeitig g auf h und h auf g abbildet

Winkel in der Schule

- Winkelfläche/-feld
- Größe: Bogen in Relation zum Vollwinkel

geometrischer Ort

Punkt mit bestimmter Eigenschaft E heißen geometrischer Ort zur Eigenschaft E (meist Abstand)

- bildet diese Punktmenge Linie: Ortslinie
- bildet Ebene oder Teil einer Ebene: Ortsbereich

Kreis als Ortslinie zu einem Punkt

Menge aller Punkte in der Ebene, die von einem gegebenen Punkt M denselben Abstand r haben, heißt Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

- $k(M,r) = \left\{ P \;\middle|\; \overline{PM} = r \right\}$
- $k_i(M,r) = \left\{ P \;\middle|\; \overline{PM} < r \right\}$
- $k_a(M,r) = \left\{ P \;\middle|\; \overline{PM} > r \right\}$

Lagebeziehungen Kreis - Gerade

- kein Schnitt: Passante
- 1 Berührpunkt: Tangente
- 2 Schnittpunkte
  - Sekante durch Mittelpunkt: Zentrale
  - $[PQ]$ einer Sekante: Sehne (bei Zentrale: Durchmesser)

Mittelsenkrechte als Ortslinie zu 2 Punkten

Menge aller Punkte, die von A und B gleichweit entfernt sind.
formal: Schnittpunkte der Kreise um A und B mit Radius r. Vereinigungsmenge für alle Radien r über alle Schnittpunktmengen ergibt die Ortslinie zwischen A und B.

Ortslinie ermöglicht

- Neubetrachtung Parallele
- Definition der Winkelhalbierenden

für 2 Geraden:

- Mittelparallele (parallele Geraden)
- Winkelhalbierende (Geraden mit Schnitt)

Konstruktionsvorschrift: Mittelsenkrechte

Schlage um A und B Kreis mit $r > \overline{AB}$. Mittelsenkrechte ist Gerade durch Schnittpunkt beider Kreise

Konstruktionsvorschrift: Winkelhalbierende

(1) vom Scheitel S ausgehend gleich lange Strecken auf den Schenkeln abtragen.

(2) Kreise um enstehende Punkte B und C

(3) Schnittpunkt der Kreise bestimmt mit S die Winkelhalbierende

Umkreis

- innermathematische Motivation: Lösen einer „Knobelaufgabe“ $\longrightarrow$ neue Begriffe
- außermathematische Motivation: Sachaufgabe, bei welcher der neue Begriff hilft
- Konstruktion
  (1) 2 Mittelsenkrechten
  (2) Schnittpunkt ist Umkreismittelpunkt mit Radius $\overline{MA}$
- Jedes Dreieck hat einen Umkreis

Umkreismittelpunkt = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

(a) $\exists$ Kreis durch A, B, C

(b) Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt

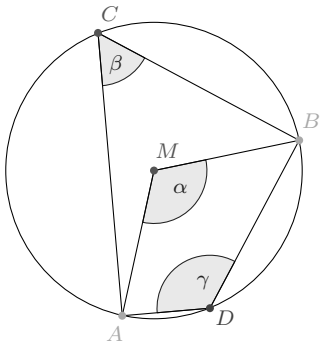
(c) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist Mittelpunkt des Umkreises

Inkreis

- Jedes Dreieck hat einen Inkreis.
- Mittelpunkt ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Umfangswinkelsatz

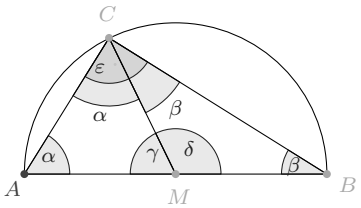
- Alle Umfangswinkel zu gegebenem Mittelpunktswinkel sind kongruent und halb so groß wie der Mittelpunktswinkel.



- α Mittelpunktswinkel ; β Umfangswinkel
- $\beta + \gamma = 180°$
- Umfangswinkel über Halbkreis: $90°$

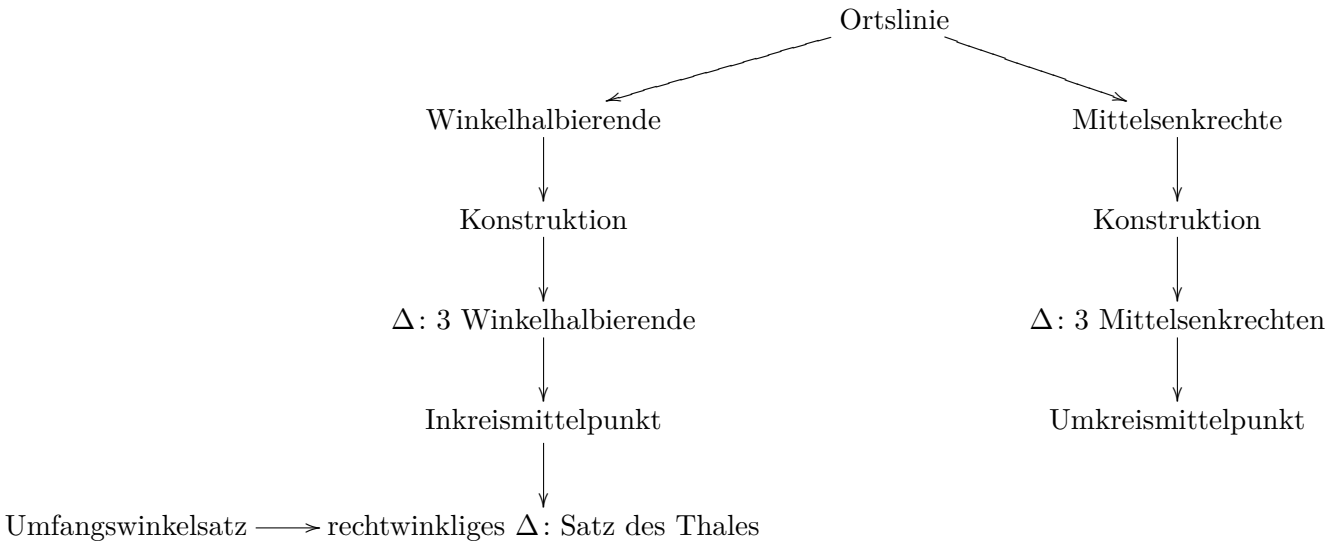
Satz des Thales

$[A, B]$ Durchmesser von k und $C \in k \implies \sphericalangle ACB = 90°$



$\alpha + \beta + \varepsilon = 2(\alpha + \beta) = 180° \implies \alpha + \beta = 90° = \varepsilon$

Curriculares Wissen



Konstruieren

- 2 Punkte verbinden
- Strecken verlängern
- Kreise ziehen

Ziele

- Problemlösen
- Argumentations- und Begründungsfähigkeit
- Kreativität (falls keine Standardkonstruktion)
- Entwicklung haptischer und feinmotorischer Fähigkeiten
- Einführung neuer Begriffe
- Geschichte der Mathematik (Euklid)

Kongruenzabbildungen und Symmetrie

symmetrisch

Figur heißt symmetrisch, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, welche die Figur auf sich selbst abbildet (Figur ist invariant unter dieser Abbildung).

Kongruenz in der Schule

(1) Kongruenzabbildungen (abbildungsgeometrischer Zugang)

(2) Kongruenzsätze (kongruenzgeometrischer Zugang)

Abbildung

M, N Mengen; $f\colon M \longrightarrow N$, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet, heißt Abbildung

geometrische Abbildung

Abbildung einer ganzen Ebene

Kongruenzabbildung

- definierende Eigenschaft: längentreue Abbildung
- bijektiv
- geradentreu
- parallelentreu
- winkeltreu
- rechtecktreu
- dreiecktreu
- kreistreu
- flächentreu

Kongruenz zweier geometrischer Figuren

2 geometrische Figuren heißen Kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung gibt, welche die eine Figur auf die andere abbildet.

Symmetrie und Kongruenz werden durch die Existenz von Kongruenzabbildungen definiert.

Fixpunkt, Fixgerade

Bild und Urbild sind identisch

Fixpunktgerade

Gerade aus Fixpunkten

Spiegelbild

A, B Punkte mit $A, B \in g$, $P \notin g$ und $P' \notin g$, $\overline{AP} = \overline{AP'}$ und $\overline{BP} = \overline{BP'} \implies P'$ Spiegelbild von P

Achsenspiegelung

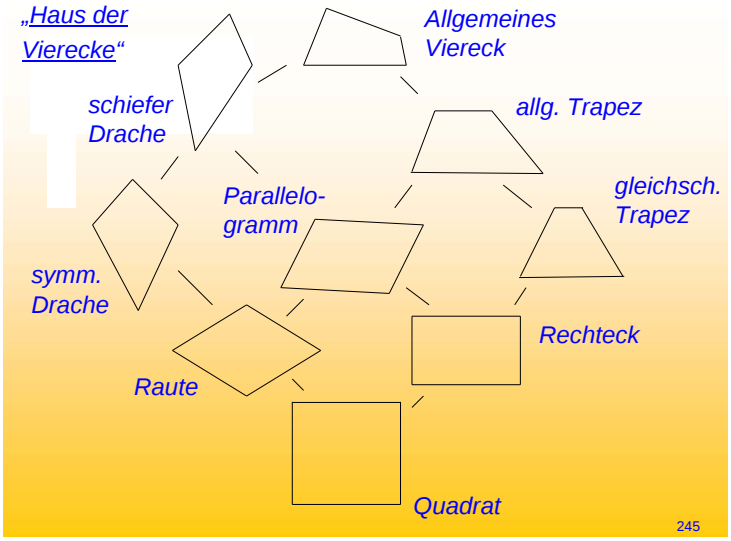
$S_g(P) = P'$ (genau 1 Spiegelbild)
zu 2 Punkten P und Q $\exists$ 1 Gerade mit $S_g(P) = Q$; P' und Q' Bilder von P und Q. Dann gilt $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$

- NICHT orientierungstreu (per Definition)
- gleichsinnig orientiert: gerade Anzahl von Achsenspiegelungen bildet die Figuren aufeinander ab
- $S_g \circ S_g = \mathrm{id}$

Dreispiegelungssatz

Jede Kongruenzabbildung lässt sich durch Hintereinanderausführung von maximal 3 Achsenspiegelungen darstellen.

Haus der Vierecke



Punktspiegelung

1 Fixpunkt; jedem P wird ein P' zugordnet, sodass M $[PP']$ halbiert. M heißt Zentrum.

alternativ: Drehung um 180°

$\rightsquigarrow$ Doppelachsenspiegelung mit sich im 90° Winkel schneidenden Achsen

$\rightsquigarrow$ Selbstinvers

allgemeine Drehung

Abbildung $D_{M,\alpha}$ der Ebene auf sich heißt Drehung, wenn sie einen Fixpunkt M besitzt und wenn $\forall\ P \in E\ ,\ P \neq M$ und das Spiegelbild P' gilt

$$\overline{MP} = \overline{MP'} \quad \text{und} \quad \sphericalangle PMP' = \alpha$$

Doppelachsenspiegelung mit jeweils α als Achsenschnittwinkel

Parallelverschiebung, Translation

Hintereinanderausführung von 2 Achsenspiegelungen mit parallelen Achsen g und h

- eine von id verschiedene Abbildung (bijektiv) der Ebene auf sich, die jede Gerade auf eine parallele Gerade abbildet und KEINEN Fixpunkt besitzt, ist eine Parallelverschiebung
- τ Parallelverschiebung. $\Big(P, \tau(P)\Big)$ Menge aller Punktepaare heißt Vektor $\overline{P\tau(P)}$

- Translation durch Punkt P und Bildpunkt P' eindeutig bestimmt

Schubspiegelung

Hintereinanderausführung von 3 Achsenspiegelungen an p, q, r mit $p \parallel q$ und $q \perp r$

$\rightsquigarrow$ Jede NICHT-orientierungserhaltende Abbildung ist eine Schubspiegelung.

Bei diesem Thema gut zu verwenden: dynamische Geometriesoftware

Wichtig bei Achsenspiegelungen

Änderung des Orientierungssinnes

Schwierigkeiten beim zeichnerischen Spiegeln

(1) Spiegelung, wenn Achsen NICHT horizontal oder vertikal liegen

(2) Spiegelachse in der Figur

(3) kein Karopapier

Mögliches Problem: Verschwimmen von Achsensymmetrie (Figur) und Achsenspiegelung (Abbildung)

auch zu behandeln

- Drehzentrum außerhalb der Figur
- andere Drehwinkel, nicht nur 90°, 180°, 270°
- Konstruktion
- Drehung und Drehsymmetrie trennen!

Schülerschwierigkeiten

(1) Drehzentrum in Figur = Symmetriezentrum

(2) Drehzentrum in Figur $\neq$ Symmetriezentrum

(3) Drehzentrum außerhalb der Figur

Veranschaulichung von Drehungen durch Zeichnen auf transparentem Papier

$\rightsquigarrow$ Original „noch da“

$\rightsquigarrow$ Drehung der gesamten Ebene

bei Translation auch zu behandeln

(1) Verschiebung nicht nur horizontal/vertikal

(2) Verschiebung konstruieren

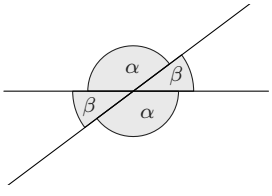
(3) Vektoraddition graphisch durchführen und verbal beschreiben

(4) Verschiebung und Verschiebungssymmetrie trennen!

Didaktische Ziele

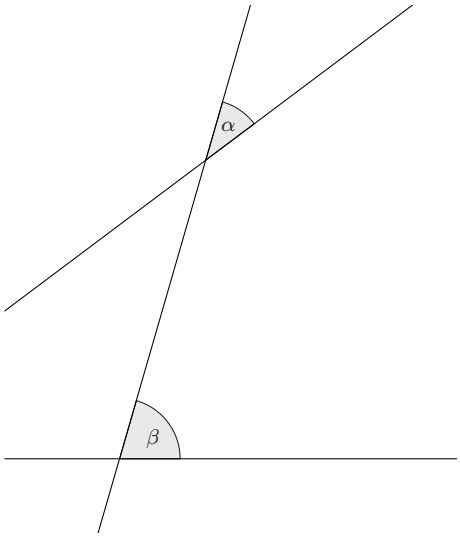
- Kongruenzabbildungen = Handlungen
- Kongruenz/Symmetrie = Eigenschaften
- im Vordergrund: Lehre vom Anschauungsraum

Winkel



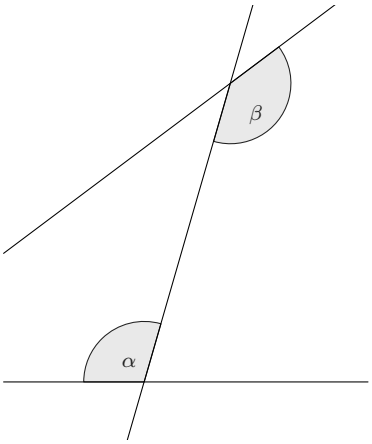
- α und β Nebenwinkelpaar
- β und β Scheitelwinkelpaar

Ungenauigkeit: Identifizierung von Winkel und Winkelmaß. Dies ist eigentlich NICHT dasselbe!



α und β Stufenwinkel (1 gemeinsamer Schenkel)

auch wenn nicht $\parallel$, aber falls $\parallel \iff \alpha = \beta$ (Stufenwinkelsatz)



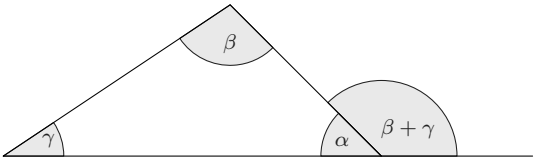
α und β Wechselwinkel

$\alpha = \beta \iff g \parallel h$

lokale Ordnung

Nebenwinkel
↓
Scheitelwinkel
↓
Stufenwinkel
↓
Wechselwinkel
↓
Winkelsumme im Dreieck
↓
Winkelsumme im n-Eck

Außenwinkelsatz

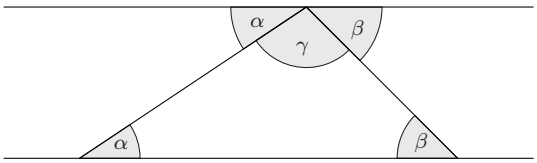


Das Winkelmaß des Außenwinkels ist gleich dem Winkelmaß der dem Außenwinkel nicht anliegenden Winkeln.

Winkelsumme im Dreieck

... beträgt 180°

Beweis



$$\Longrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$$

□

Auf Kugeloberflächen gilt dies NICHT! ⇝ KEINE Geraden

Konvexes n-Eck

Jedes n-Eck ($n > 2$) kann in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt werden

$\Longrightarrow$ Winkelsumme$= (n-2) \cdot 180°$

Vielecke

- 3- und 4-Ecke spielen entscheidende Rolle
- Jedes Vieleck lässt sich aus 3-Ecken zusammensetzen
- 4 Ecke wichtig für die Lehre vom Anschauungsraum

Dreiecke

Klassifikation bezüglich

- Winkel (spitz-, recht-, stumpfwinklig)
- Seiten (gleichseitig, gleichschenklig, paarweise verschieden)
- Symmetrie

Symmetrieachsen: 1 oder 3

Beweis

Ist S_1 kongruent zu S_2 und $\exists$ noch eine 2. Achse, sodass S_3 kongruent zu S_1

$\Longrightarrow$ S_3 kongruent zu S_1 und somit $\exists$ 3. Achse

□

Kongruenzsätze für Dreiecke

- SSS
- WSW
- SWS
- SsW

ACHTUNG: $\nexists$ WWW-Satz (nur Aussage über Ähnlichkeit möglich)

Kongruenzaxiome

(1) $[AB] \in g \implies \exists!\ B' \in g' \colon A' \in g'$ und $[AB] \equiv [A'B']$

(Eindeutigkeit der Streckenabtragung)

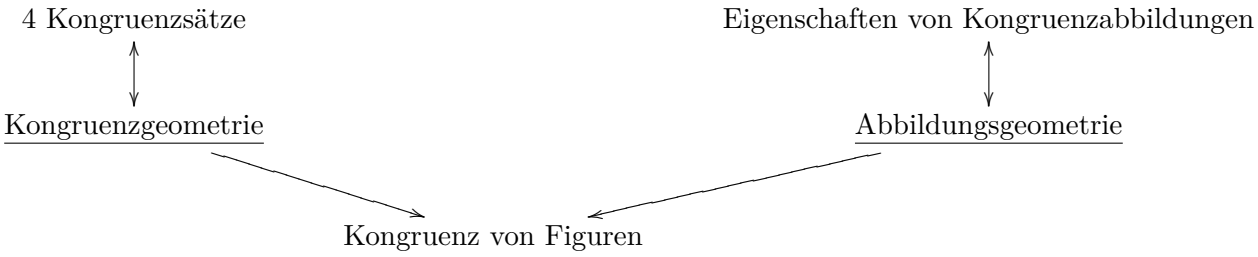
(2) $[AB] \equiv [A'B']\ ,\ [A'B'] \equiv [A''B''] \implies [AB] \equiv [A''B'']$

(Transitivität)

(3) $A, B, C \in g\ ,\ A', B', C' \in g'\ ,\ [AB] \equiv [A'B']\ ,\ [BC] \equiv [B'C']$

$\implies [AC] \equiv [A'C']$

(Additivität)



Kongruenzsätze im Unterricht

Vorteile von Kongruenzabbildungen

- leicht zugänglich
- Computernutzung
- einfache Einsichtgewinnung

Nachteile von Kongruenzabbildungen

- „unübersichtliche“ Anzahl verschiedener Eigenschaften
- formales Argumentieren/Beweisen sehr schwer

Vorteile von Kongruenzsätzen

- Übersichtliche Anzahl und Systematik
- Satz-Beweis-Struktur kann geübt werden

Nachteile von Kongruenzsätzen

- formal
- Symmetrie intuitiv nur per Kongruenzabbildung, NICHT mit Sätzen

Zugang

- Konstruktion von Dreiecken: Wie viele Angaben für eindeutige Konstruktion nötig?
- evtl. Partnerarbeit mit Folien (2 Angaben, 3 Angaben, 4 Angaben) $\longrightarrow$ verschiedene Dreiecke?
- Kontrastierung bei WWW $\lightning$ und SsW

Höhe

ABC Dreieck. Die Senkrechten auf AB, BC und AC, die durch die gegenüberliegenden Eckpunkte C, A und B gehen, heißen Höhengeraden des Dreiecks.

- Vorsicht: Höhe bezeichnet die Länge und die Senkrechte!
- Höhen schneiden sich in einem Punkt.
- Bei stumpfwinkligen Dreiecken kann die Höhe außerhalb liegen (max. 2 der Höhen)

Seitenhalbierende

Geraden, die durch den Mittelpunkt der Dreiecksseiten und die gegenüberliegende Ecke laufen.
$\rightsquigarrow$ schneiden sich in einem Punkt

Vierecke

- Klassifizierung durch Definition verschiedener Typen $\longrightarrow$ Haus der Vierecke (siehe oben)
- Kongruenz je nach Typ durch verschieden viele Stücke:
  - Quadrat 1
  - Rechteck/Raute 2
  - Parallelogramm, Drache 3
  - Trapez 4

  - allgemein 5

- primäre Merkmale: Seiten, Winkel
- sekundäre Merkmale: Diagonalen
- tertiäre Merkmale: Symmetrien

Raute/Rhombus

- 4 kongruente Seiten
- Diagonalen 90°

Trapez

(1) 2 parallele Seiten

(2) 2 parallele Seiten und 2 Paare kongruenter benachbarter Winkel heißt gleichschenkliges Trapez

Drache

(1) eine Diagonale von der anderen halbiert

(2) eine Diagonale als Symmetrieachse $\Longrightarrow$ symmetrischer Drachen

weitere Klassifikation

- Sehnenvierecke (Umkreis)
  - Mittelpunkt = Schnittpunkt der Mittelsenkrechten
  - gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu 180° (Umfangwinkelsatz)
  - Quadrate, Rechtecke, gleichschenklige Trapeze
- Tangentenvierecke (Inkreis)
  - Mittelpunkt = Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
  - Summe der Längen der Gegenseiten gleich
  - Quadrat, Raute, symmetrischer Drache

Flächeninhalt ebener Figuren

Messen = auslegen mit Einheitsquadraten

Äquivalenzrelation

(1) $A \sim A$

(2) $A \sim B \longrightarrow B \sim A$

(3) $A \sim B\ ,\ B \sim C \longrightarrow A \sim C$

Zerlegungsgleicheit

2 Figuren S und T in je $i = 1, \ldots, n$ Teilfiguren S_i und T_i zerlegt mit $S_i \sim T_i \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann haben S und T gleichen Flächeninhalt.

Ergänzungsgleichheit

2 ebene Figuren S und T haben gleichen Flächeninhalt, wenn sie durch hinzufügen paarweiser kongruenter Figuren S_i und T_i $(i = 1, \ldots, n)$ zu Zerlegungsgleichen Figuren ergänzt werden können.

Parallelogramm

- Hypothesen bilden lassen!
- Idee des Zerschneidens?
- $A = g \cdot h$
- Zerlegungs- oder Ergänzungsgleichheit ($\longrightarrow$ Höhe außerhalb!)

Trapez

- $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$
- Zerlegung zu Parallelogramm (Mittelparallele)
- Ergänzung durch Verdoppeln

Abfolge der Flächen

- Rechtecke
- Parallelogramme
- Trapeze
- Dreiecke
- Drachen, Rauten

Dreiecksfläche

- Reckteck halbieren
- auf halber Höhe „abschneiden“ $\longrightarrow$ Parallelogramm
- rechtwinklige Teildreiecke verdoppeln
- $\Longrightarrow$ Schülerproblem: Höhe außerhalb

symmetrischer Drache

- $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ mit e, f Diagonalen
- Triangulierung
- Ergänzung (4 rechtwinklige Dreiecke, dann $\frac{1}{2}$ gesamt)
- Zerlegung („nach unten klappen“ $\longrightarrow$ Rechtecke) oder zu Parallelogramm

Bemerkung: Ergänzung immer, wenn neue Flächen dazukommen

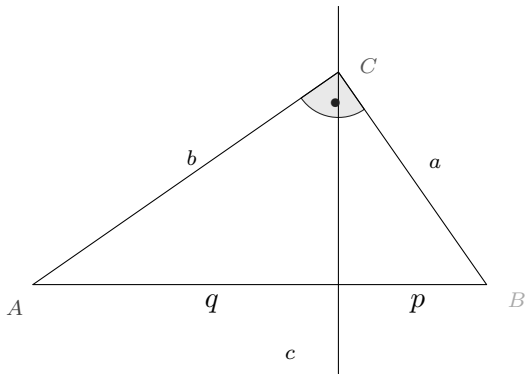
Dreiecksfläche als Determinante

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} bx \\ by \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} ax & bx \\ ay & by \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(axby - bxay)$$

Satzgruppe des Pythagoras

auch: Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck



$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Kathetensätze

- $a^2 = p \cdot c$
- $b^2 = q \cdot c$

Höhensatz

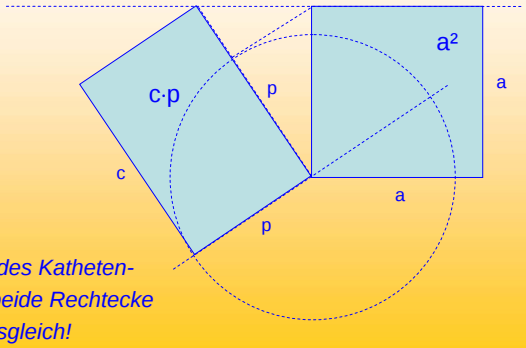
$h^2 = q \cdot p$

Lernvoraussetzungen

- Dreieckeigenschaften
- Kongruenzsätze, Kongruenzabbildungen
- Flächeninhaltsformeln
- algebraische Umformungen

9.4.1 Anwendung des Kathetensatzes

Konstruktion eines flächeninhaltsgleichen (echten) Rechtecks zu einem gegebenen Quadrat.



→ Aufgrund des Kathetensatzes sind beide Rechtecke flächeninhaltsgleich!

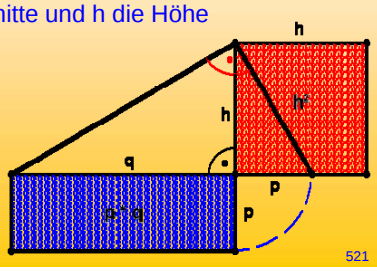
520

9.4.2 Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat „über" der Höhe der Hypotenuse flächeninhaltsgleich zum Rechteck, dessen Seiten die beiden Hypotenusenabschnitte sind.

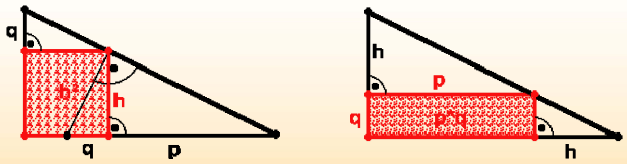
Seien also a und b die Katheten, p und q die Hypotenusenabschnitte und h die Höhe über der Hypotenuse:

Dann gilt $h^2 = pq$



521

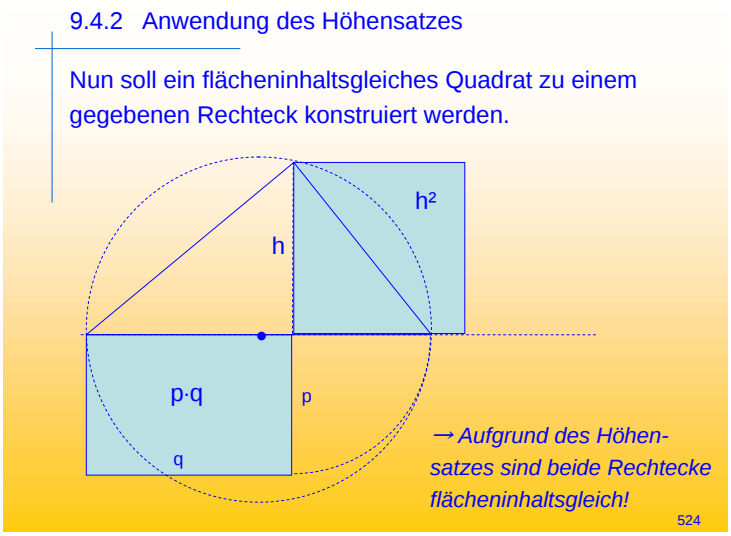
9.4.2 Beweis des Höhensatzes durch Ergänzungsgleichheit

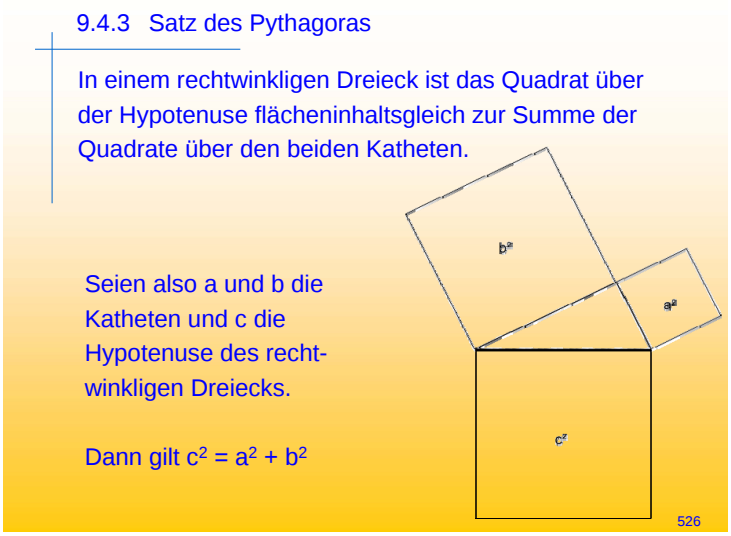


- die großen Dreiecke sind kongruent (SWS)
- die kleinen Dreiecke sind kongruent (SWS)
- die beiden „Gesamtfiguren" sind kongruent (SWS)
  → rote Figuren müssen flächeninhaltsgleich sein

Beweis durch Ergänzungsgleichheit und Anwendung der Kongruenzsätze!

523





Satz von Pythagoras

Im Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2 \iff$ Dreieck ist rechtwinklig

Bemerkung: Anwendung bei Längen von Vektoren

Sinus und Cosinus

Zugänge

(1) Berechnung im rechtwinkligen Dreieck (sin und cos als Seitenverhältnisse)

- natürlich, da vorher Pythagoras - jetzt einfach Winkel betrachten
- Voraussetzung: Ähnlichkeit

- Schwierigkeit: $\sin, \cos, \tan$ nur für $\varphi < 90°$ $\longrightarrow$ $0 < \ldots < 1$

  $\sin, \cos, \tan$ auch negativ??

- Definition als Seitenverhältnisse

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

- man sieht $\sin, \cos, \tan$ nicht $\longrightarrow$ Bedeutung?
- Konstanz der Verhältnisse $\longrightarrow$ Ähnlichkeitssätze!!
- Festigung durch einfache Aufgaben; dabei wichtig
  - erstmals expliziter Gebrauch der Inverstaste
  - Unterscheidung „rad“ und „deg“

(2) Winkelfunktionen am Einheitskreis (Koordinaten der entsprechenden Punkte)

$\rightsquigarrow$ sin und cos als Funktionen

- Dreiecke in den Einheitskreis legen
- Wurzeln in sin- und cos-Werten: Pythagoras

Sinussatz, Cosinussatz

Jedes Dreieck lässt sich durch die Höhe in 2 rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

- Sinussatz
  - $h = \sin(\alpha) \cdot b$
  - $h = \sin(\beta) \cdot a$
  - $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$
- Cosinussatz
  - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

– Verallgemeinerung von $c^2 = a^2 + b^2$

Sinus und Cosinus für Flächen

$$\left.\begin{aligned} h &= a \cdot \sin(\beta) \\ h &= b \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta) \\ A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

und $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin(\gamma)$

Polarkoordinaten

Kreis um 0 mit Radius r: $(x, y) = \Big(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)\Big)$

Bogenmaß

$$\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

- im Einheitskreis gilt Bogenlänge = Bogenmaß
- alternative Messfunktion für Winkel
- Vorteil: Messung einer Länge

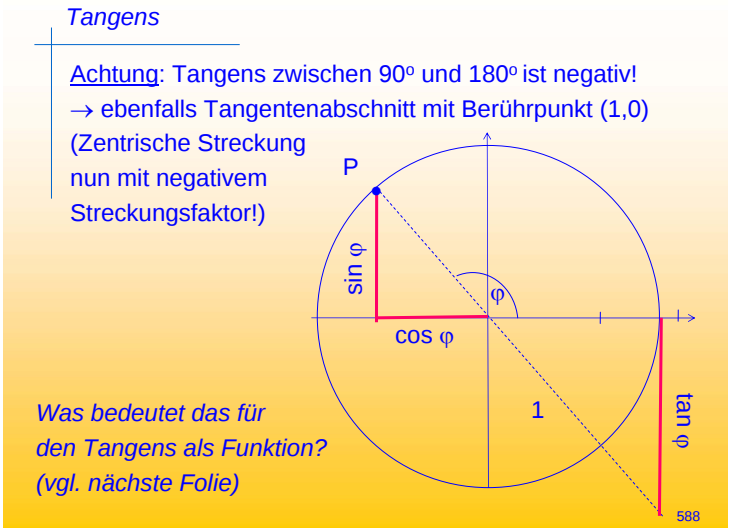
  $\rightsquigarrow$ Vergleich von Winkelgrößen und Radius auf selber Messskala

$$\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Umfang}} = \frac{\text{Gradmaß des Winkels}}{\text{Gradmaß des Vollwinkels}}$$

$\longrightarrow$ x-Achse bei $\sin, \cos, \tan$ Bogenmaß

Tangens

- KEINE Welle
- punktymmetrisch
- periodisch



Funktionale Eigenschaften von Sinus, Cosinus und Tangens untersuchen

- $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$
- Vergleich mit anderen Funktionstypen
- Periodizität immer 2π
- Maxima, Minima
- Verhältnis sin $\longleftrightarrow$ cos
- Symmetrie
  - sin: Punkt zu 0, Achse zu $\frac{\pi}{2}$
  - cos: Punkt zu $\frac{\pi}{2}$, Achse zu y-Achse
  - tan: Punkt zu 0, Achse NICHT translationssymmetrisch

zentrische Streckung und Ähnlichkeit

Vorwissen

Kongruenzabbildungen (Spiegelung, Drehung, Translation ...)

$\rightsquigarrow$ geraden-, winkel-, kreis-, parallelen- und längentreu

$\rightsquigarrow$ Figur und Bildfigur kongruent

zentrische Streckung

- Dilatation mit Fixpunkt
- gerade-, winkel-, kreis-, parallelen- und teilverhältnistreu
- Figur und Bildfigur sind ähnlich

  $\rightsquigarrow$ maßstabsgetreue Vergrößerung bzw. Verkleinerung
- Maßstab $= \frac{\text{Länge der Strecke im Bild}}{\text{Länge im Original}}$

Punkt P mit Bildpunkt P' auf Halbgerade, die vom Zentrum Z ausgeht

$$\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$$

mit k als Streckungsfaktor

- Alle Punkte der Ebene werden abgebildet!
- 2 Arten von Abbildungen, die Geraden auf parallele Graden abbilden
  - Translation (KEIN Fixpunkt)
  - zentrische Streckung (1 Fixpunkt, Zentrum)

Dilatation

Abbildung der Ebenen auf sich selbst heißt genau dann Dilatation, wenn sie jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abbildet und einen Fixpunkt hat.
Man könnte sie auch „Parallelvergrößerung“ nennen.

Eigenschaften

- parallelentreu
- Fixpunkt = Zentrum
- Geraden mit $Z \in g$ heißen Fixgeraden (KEINE Fixpunktgeraden)
- zentrische Streckung mit Zentrum $Z \iff \exists\, k \in \mathbb{R}$ mit $|k| \neq 0$, sodass $\forall$ A und Bilder A' gilt

$$\left|\overline{ZA'}\right| = |k| \cdot \left|\overline{ZA}\right|$$

Streckungsfaktor

- $k > 1$: Vergrößerung
- $0 < k < 1$: Verkleinerung
- $-1 < k < 0$: Verkleinerung + andere Seite des Zentrums
- $k < -1$: Vergrößerung + andere Seite des Zentrums
- $k = 1$: id
- $k = -1$: Punktspiegelung
- $k = 0$: KEINE zentrische Streckung
- Fläche: $|k|^2$ mal so groß (jede Seite mal $|k|$)
- Volumen: $|k|^3 \cdot V$

Schwierigkeiten für Schüler

- Überlappen von Bild und Urbild
- Zentrum in der Figur

Bemerkung: Zentrum ist neu für Schüler; M ist bekannt

Ähnlichkeitsabbildung

Hintereinanderausführung einer endlichen Anzahl von zentrischen Streckungen und Kongruenzabbildungen

- Bild und Urbild NICHT notwendigerweise auf demselben Strahl
- Scherung (Rechteck$\longmapsto$Parallelogramm) ist KEINE Ähnlichkeitsabbildung
- Ähnlichkeitsabbildungen sind geraden-, parallelen-, kreis- und (teil)verhältnistreu
- Ähnlichkeitsabbildungen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe

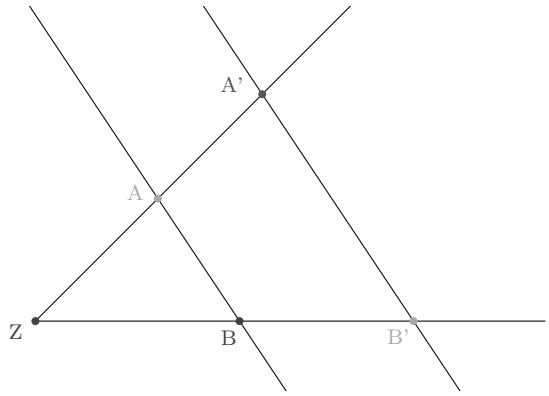
Drehstreckung

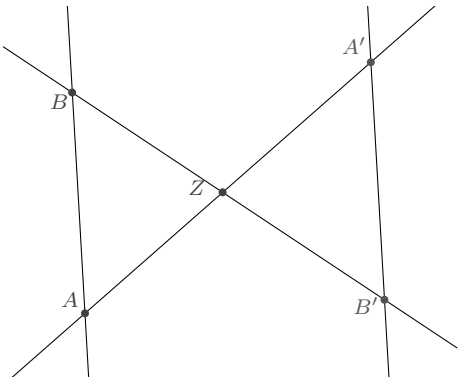
Verknüpfung einer Drehung und einer Streckung mit demselben Zentrum

Spiegelstreckung

Verknüpfung einer Achsenspiegelung und einer Streckung mit Zentrum auf der Achse

Strahlensätze/Vierstreckensätze





$$\boxed{\frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB}} \quad ; \quad \boxed{\frac{AA'}{ZA} = \frac{BB'}{ZB}} \quad ; \quad \boxed{\frac{A'B'}{AB} = \frac{ZA'}{ZA}}$$

Ähnlichkeitssätze

(1) 2 Dreiecke ähnlich, wenn sie im Verhältnis der 3 Seiten übereinstimmen (SSS)

(2) 2 Dreiecke ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (SWS)

(3) 2 Dreiecke ähnlich, wenn sie in 2 Winkeln (und damit in 3) übereinstimmen (WW)

(4) 2 Dreiecke ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (SsW)