Algebradidaktik

WS 2012/2013

(Prof. Dr. Stefan Krauss)

Juliane Wutz / Julian Palme

(Stand: 28. Januar 2013)

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung 'Didaktik der Algebra', gelesen von Herrn Prof. Dr. Stefan Krauss im Wintersemester 2012/2013 an der Universität Regensburg. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

Beispiele typischer Schülerfehler

- das dreifache von x: $x \cdot x \cdot x$
- eine Zahl um 7 vermehren: $7x$
- $a^2 + a^2 = a^4$
- Hans (x) ist 10 cm größer als Susi (y): $10 + x = y$
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

4 zentrale Begriffe

- Funktionen
- Gleichungen
- Terme
- Variablen

Begriffslernen

- verschiedene Zugänge
- Beispiele sollten NICHT einschränken
- alle wichtigen Eigenschaften thematisieren
- Vernetzung der verschiedenen Aspekte

systematische Darbietung

- Variation
- Sonderfälle
- Kontrastierung
- dann **Definition**!

Variablenbegriff

(1) Einsetzungsaspekt (Platzhalter)

(2) Gegenstandsaspekt (steht für feste Zahl)

(3) Kalkülaspekt (einfach rechnen)

Term

- sinnvoller Rechenausdruck, der bei Belegung sämtlicher Variablen in einen Zahlenwert übergeht (KEIN „=“ mehr)
- Nutzen
  - Bauplan (Zusammenhang darstellen)
    - ⇝ Baumdiagramm
    - ⇝ Term in Einzelteile aufsplitten
    - ⇝ „Klammergebirge“
  - Rechenschema (nach Zusammenhang ⟶ Ergebnis)
- Möglichkeiten mit Termen
  - Aufstellen
  - Einsetzen
  - Umformen
    - Ordnen
    - Zusammenfassen
    - Klammern auflösen
  - Interpretieren
- operantes Prinzip: geometrisch veranschaulichen
- Schülerfehler: „$\cdot$“ vor „$-$“ NICHT beachtet ⟶ Klammern setzen
  ⇝ verstärke Klammern durch einkreisen
- Missbrauch des Gleichheitszeichens: z. B. addiere zu $5 + 7$ die Zahl 3
  $5 + 7 = 12 + 3 = 15$

- Probleme bei Klammern mit „−“ vor oder in der Klammer:

  $(2x - y) - 5(x + y) = 2x - y - 5x + 5y \quad ; \quad (-2)a = -2a$

Minus

- Rechenzeichen
- Invertierungszeichen
- Vorzeichen

häufigster Fehler: **Übergeneralisierung**

- $\frac{5}{3} + \frac{x}{8} = \frac{5+x}{11}$ wegen $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $4(x \cdot y) = 4x \cdot 4y$ wegen $a(b + c) = ab + ac$
- $3(x + 7) = 3x + 7$ wegen $a \cdot (b \cdot c) = abc$

Formel

- spezielle Gleichung, die einen allgemeingültigen Zusammenhang beschreibt
- Ohmsches Dreieck: $U = R \cdot I$

$$\frac{U}{R \cdot I} = 1$$

- durch Formeln allgemein darstellen und explorieren (z. B. was passiert, wenn ...?)

Lernziele Terme

(1) innermathematische Prozesse und Gesetzmäßigkeiten (Rechenregeln) allgemein beschreiben

(2) außermathematische Sachverhalte $\longrightarrow$ Modelle für außermathematische Situationen

(3) Situationen explorieren $\longrightarrow$ allgemeine Einsichten in besondere Situationen

(4) allgemeine Problemlösung

(5) allgemeingültige Argumentation

(6) Wissensvermittlung auf allgemeiner Ebene

Gleichungen

Term = Term

Lösung einer Gleichung

Alle Zahlen, die bei Einsetzung zu einer wahren Aussage führen.

Lösen heißt, nach diesen Zahlen zu suchen.

Umformen einer Gleichung

- beide Seiten möglichst äquivalent
- Term $\Longleftrightarrow$ Gleichung
- Term umformen heißt aktiv in wertgleichen Term umwandeln
- Gleichung von vornherein zwei Terme, nur bestimmte x

Gleichungsarten

- Bestimmungsgleichungen
- Formeln
- Definitionsgleichungen
- Gleichung zur Formulierung von Rechengesetzen
- Zahlengleichungen
- Funktionsgleichungen
- Gleichung zur Beschreibung von Eigenschaften von Funktionen

Umformungen

- Termumformungen $\Longrightarrow$ beide Seiten unabhängig voneinander
- simultane, abhängige Umfomungen beider Seiten
  - Äquivalenzumformungen
  - Gewinnumformungen (quadrieren, mit x multiplizieren)

– Verlustumformungen ($\sqrt{}$, Division durch x)

gute Veranschaulichung durch das Waagemodell

Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungen

- Probieren
- Umformen
- Rückwärtsrechnen (Zahlenrätsel)
- Waagemodell
- Balken-/Strichdiagramm
- Bauplan
- Operatorkette
- am Graphen
- Tabelle
- Gegenaufgabe

Probe zu Kontrolle, ob Lösung auf Anfangsgleichung passt.

Ungleichungen

$\cdot(-x)$ $(x > 0)$: umdrehen des Ungleichheitszeichens (Spiegelung am 0-Punkt)

Gleichungssysteme

- 2 Variablen
- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Realschule zusätzlich: Determinanten

quadratische Gleichungen

Gleichungen, die durch Äquivalenzumformungen in die Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0)$$

gebracht werden können.
Lediglich Visualisierung als Graphen!

- quadratische Ergänzung
- Scheitelpunktform
- Satz von Vieta
- Näherungsverfahren (Heron $\longrightarrow$ Näherung von Quadratwurzeln)

Wurzel

- Wurzel und Quadrat NICHT immer Aufhebung
- immer positiv (Wert NIE negativ, Radikant immer positiv)
- quadratische Gleichungen: $\pm$

Funktionen

Zuordnungs-, Kovariations-, Objekt-Vorstellung

mathematische Darstellungen

Term Gleichung Zuordnung	formal
Tabelle Graph Pfeildiagramm	ikonisch

Maschine - enaktiv (Erfassung von Sachverhalten durch eigene Handlungen)

Zuordnung

- früh angelegt (Terme, Tabellen)
- Unterstützung durch Mengenschreibweise
- Pfeildiagramm
- „Maschine“
- evtl. Problem: gedankliche Erweiterung auf kontinuierliche Größen

Kovariation

- Abhängigkeit
- wichtig für späteres Leben $\longrightarrow$ kompetenter Umgang mit Medien
- Proportionalität (Physik)

Objekt

- Menge aller Wertepaare
- Graph = Funktion
- Manche Eigenschaften besser sichtbar (Symmetrie, Periodizität ...)
- wegen fehlendem Graphen werden z. B. Abbildungen zwischen zwei Mengen nicht als Funktionen gesehen

Darstellungsformen

- Term
  - $x \longrightarrow ax + b$ linear
  - $x \longrightarrow a^2x + bx + c$ quadratisch
  - $x \longrightarrow a\sin(bx + c) + d$ trigonometrisch
  - Zuordnungscharakter im Vordergrund (aber auch ohne Pfeil)
  - KEINE Gleichung
- Gleichung $\Big(y = f(x)\Big)$

  - gängigste Darstellung
  - Art der Funktion wird deutlich
  - schwierig: nichts ausrechnen (auflösen) $\longrightarrow$ Kovariationscharakter
  - ermöglicht Beschreibung von Eigenschaften

    $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ additiv

    $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ multiplikativ

    $f(x \cdot a) = f(x)$ periodisch

    $f(-x) = f(x)$ achsensymmetrisch

    $f(-x) = -f(x)$ punktsymmetrisch
  - Funktionsgleichungen beschreiben Eigenschaften des gesamten Objekts

- Zuordnungsvorschrift
  - Pfeildiagramm
- Tabelle
  - Kovariations- und Zuordnungscharakter
  - direktes Anknüpfen an Vorwissen (zu Term und Gleichungen)
  - Neu: Ergebnis heißt y
  - häufig verwendet, aber welches Intervall interessant?
- Graph
  - unterstützt Objektvorstellung
  - Visualisierung von Eigenschaften
  - Beachte: NIE ganze Funktion - NUR Ausschnitt!
  - typische Fehler: z. B. Parabel zu „eckig“ ($\rightsquigarrow$ Wertetabelle erweitern) bzw. im Punktdiagramm verbinden $\lightning$
- Maschine
  - „Handlung“ (Vorstellung enaktiv)
  - Input-Output-Vorstellung
  - Zuordnungsvorstellung betont!

Fachmathematisch reicht Definition - Didaktisch ist es wichtig, möglichst Vorstellung von ganzer Bandbreite zu erzeugen.

Definition: Funktion

nichtleere Mengen A, B. Eine **Funktion** ist eine **Zuordnung**, die jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zuordnet.

- injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- surjektiv: $f(A) = B$
- bijektiv: injektiv und surjektiv

Stufenlernmodell für Funktionen

(1) Vermittlung von Grunderfahrungen (Phänomen)

(2) Entdecken von Eigenschaften

(3) Aufdecken von Zusammenhängen
$\longrightarrow$ Teil eines Begriffsnetzes, Zusammenhänge zwischen Eigenschaften werden formalisiert, Funktion definiert

(4) Entdecken neuer Funktionstypen

Beispiel: proportionale Funktionen

- erste Erfahrungen schon in der GS (Geld als Umwelterfahrung)
- 5. Klasse: Einheit $\longrightarrow$ Vielheit
- 7. Klasse: Zusammenhang von Größen
  - Kovariations- und Zuordnungsvorstellung
  - Regelhaftigkeit
  - Grundlage für Funktionsbegriff
- Kontrastierung wichtig! $\longrightarrow$ Proportionalität nur eine Möglichkeit!
- Betrachtung von einer Größe bei nur einer gegebenen zweiten Größe
  $\longrightarrow$ Ausbau zum Funktionsbegriff

Eigenschaften proportionaler Funktionen

(1) Vervielfachungseigenschaft (Homogenität) (mit Zwischenschritt = Dreisatz)

(2) Additionseigenschaft (Additivität)

(3) Verhältnisgleichheit

z. B. $6\,\text{kg} \mathrel{\hat{=}} 12\,€$; $8\,\text{kg} \mathrel{\hat{=}} x\,€$

$\rightsquigarrow$ NICHT konstant!

(4) Quotientengleichheit

(5) Graph

(6) Proportionalität

Proportionalitätsfaktor

$$\frac{\text{zugeordnete Größe}}{\text{Ausgangsgröße}}$$

Definition

$x \longmapsto a \cdot x \quad , \; a > 0, x > 0$ mit a Proportionalitätsfaktor und Steigung der Geraden

$\longrightarrow$ auch für negative Werte

lineare Funktion

$x \longmapsto ax + b$

$b = 0 \implies x \longmapsto ax$ (proportional)

$a = 0 \implies x \longmapsto b$ (konstant)

Eigenschaften linearer Funktionen

- Eigenschaften von proportionalen Funktionen gelten NICHT mehr
- Monotonie/Konstanz

Steigung

$m\colon 1 \longmapsto m \;\uparrow (\downarrow)$

Funktionsterm

$y = f(x)$ (Funktionsgleichung)

Funktionswert bei Belegung von x

Scheitelpunktform

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x-d)^2 + e \quad \text{mit Scheitel } S(d,e)$$

$$d = -\frac{b}{2a} \quad , \quad e = c - \frac{b^2}{4a}$$

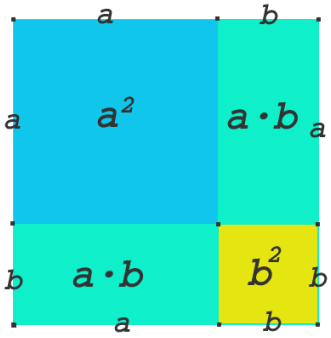
$a > 1$ eng nach oben ; $0 < a < 1$ weit nach oben

$a < -1$ eng nach unten ; $-1 < a < 0$ weit nach unten

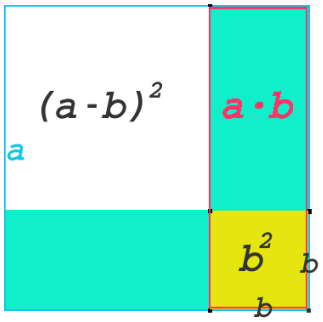
a Öffnung und c y-Achsenabschnitt

graphische Darstellung der binomischen Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$

