Elementargeometrie

WS 2013/2014

(Dr. Daniela Schiefeneder)

Julian Palme

(Stand: 5. Februar 2014)

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung 'Elementargeometrie', gelesen von Frau Dr. Daniela Schiefeneder im Wintersemester 2013/2014 an der Universität Regensburg. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

Inhaltsverzeichnis

I Rechnen mit Vektoren **1**
1.1 Der n-dimensionale Raum . . . 1
1.1.1 Standardraum $\mathbb{R}^n$ (Def) . . . 1
1.1.2 „Geordnet“ (Bem) . . . 1
1.1.3 Beziehung zwischen Punkt und Vektor (Bem) . . . 2
1.2 Vektoraddition und Skalarmultiplikation . . . 4
1.2.1 Skalarmultiplikation (Def) . . . 4
1.2.2 Aufgabe . . . 6
1.2.3 Rechenregeln (Satz) . . . 6
1.3 Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ . . . 7
1.3.1 Skalarprodukt (Def) . . . 7
1.3.2 Aufgabe . . . 7
1.3.3 Rechenregeln Skalarprodukt (Satz) . . . 7
1.4 Länge eines Vektors . . . 9
1.4.1 Euklidische Länge bzw. Norm und Abstand (Def) . . . 9
1.4.2 Pythagoras (Bem) . . . 9
1.4.3 Aufgabe . . . 9
1.4.4 Eigenschaften der Norm (Satz) . . . 9
1.4.5 Parallelogrammgleichung, Polarisationsgleichung (Satz) . . . 11
1.4.6 Zwei wichtige Ungleichungen (Satz) . . . 11
1.4.7 Eigenschaften der Abstandsfunktion d (Satz) . . . 12
1.5 Winkel zwischen zwei Vektoren . . . 13
1.5.1 Winkel zwischen zwei Vektoren (Def) . . . 13
1.5.2 Aufgabe . . . 14
1.5.3 Cosinussatz (Satz) . . . 14
1.5.4 Orthogonale Vektoren (Lemma) . . . 14

II Geraden, Strecken, Halbgeraden **16**
2.1 Parameterform einer Geraden . . . 16
2.1.1 Parameterform einer Geraden (Def) . . . 16
2.1.2 Aufgabe . . . 16
2.1.3 (Satz) . . . 17
2.1.4 Folgerung . . . 20
2.1.5 Beispiel zur Folgerung 2.1.4 (Bsp) . . . 21
2.1.6 Gerade als Lösungsmenge (Bem) . . . 21
2.2 Strecken und Halbgeraden . . . 21
2.2.1 Strecke, Länge einer Strecke (Def) . . . 21
2.2.2 (Bem) . . . 22
2.2.3 Aufgabe . . . 22
2.2.4 Halbgerade (Def) . . . 22
2.3 Kollinearität, Lagebeziehungen zwischen Geraden . . . 23
2.3.1 kollinear (Def) . . . 23
2.3.2 kollinear (Bem) . . . 23
2.3.3 (Satz) . . . 23
2.3.4 Geraden – parallel bzw. windschief (Def) . . . 24
2.3.5 (Bem) . . . 24
2.4 Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden . . . 24
2.4.1 Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden (Def) . . . 24
2.4.2 Wohldefiniertheit des Winkels zwischen (Halb)Geraden (Bem) . . . 25

2.4.3 Scheitelwinkel, Nebenwinkel (Def) . . . 26
2.4.4 Nebenwinkel, Scheitelwinkel (Satz) . . . 27
2.4.5 Stufenwinkel, Wechselwinkel (Def) . . . 27
2.4.6 (Satz) . . . 28

III Strahlensatz und Folgerungen 29
3.1 Teilverhältnis . . . 29
3.1.1 (Def) . . . 29
3.1.2 (Bem) . . . 30
3.2 Strahlensatz . . . 30
3.2.1 Strahlensatz (Satz) . . . 30
3.2.2 (Bem) . . . 33
3.2.3 Strahlensatz, nicht-orientiert (Satz) . . . 33
3.2.4 Umkehrung des Strahlensatzes im nicht-orientierten Fall (Satz) . . . 34
3.2.5 (Bem) . . . 36
3.3 Folgerungen aus Strahlensatz . . . 36
3.3.1 Parallelogrammlemma (Lemma) . . . 36
3.3.2 Satz von Pappos (Satz) . . . 38
3.3.3 Satz von Desargues (Satz) . . . 39

IV Dreiecke 40
4.1 Erste Dreiecksbetrachtungungen . . . 40
4.1.1 (Def) . . . 40
4.1.2 (Satz) . . . 40
4.1.3 Cosinussatz für Dreiecke (Satz) . . . 41
4.1.4 Sinussatz (Satz) . . . 41
4.1.5 (Def) . . . 42
4.1.6 Formel von Heron (Satz) . . . 43
4.1.7 (Def) . . . 43
4.1.8 (Satz) . . . 44
4.2 Winkelsumme und Außenwinkel . . . 44
4.2.1 (Satz) . . . 44
4.2.2 Winkelsumme Polygon (Satz) . . . 45
4.2.3 (Def) . . . 45
4.2.4 starker Außenwinkelsatz (Satz) . . . 46
4.2.5 schwacher Außenwinkelsatz (Kor) . . . 46
4.2.6 Umkehrung des Wechselwinkelsatzes (Satz) . . . 46
4.3 Rechtwinklige Dreiecke . . . 47
4.3.1 (Def) . . . 47
4.3.2 Satz des Pythagoras (Satz) . . . 47
4.3.3 (Prop) . . . 48
4.3.4 Höhensatz (Satz) . . . 49
4.3.5 Kathetensatz (Satz) . . . 50
4.4 Kongruente und ähnliche Dreiecke . . . 50
4.4.1 Kongruenzsatz (Satz) . . . 50
4.4.2 Ähnlichkeit (Satz) . . . 52
4.5 Satz von Ceva, Satz von Menelaos . . . 54
4.5.1 Satz von Ceva (Satz) . . . 54
4.5.2 Satz von Ceva (Bem) . . . 59
4.5.3 Satz von Menelaos (Satz) . . . 59
4.6 Schnittpunkte im Dreieck . . . 59

(a) Schwerpunkt eines Dreiecks **59**
4.6.1 (Satz) . . . 59

(b) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden **60**
4.6.2 (Lemma) . . . 61
4.6.3 (Satz) . . . 62
4.6.4 (Bem) . . . 62

(c) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten **62**
4.6.5 (Satz) . . . 62
4.6.6 (Bem) . . . 63
4.6.7 (Lemma) . . . 63

(d) Höhenschnittpunkt **63**
4.6.8 (Satz) . . . 64
4.6.9 (Lemma) . . . 65

V Der Kreis **65**
5.1 Mittelpunktsgleichung, Sekante und Tangente . . . 65
5.1.1 (Def) . . . 65
5.1.2 (Satz) . . . 67
5.1.3 (Def) . . . 68
5.1.4 Sekantensatz (Satz) . . . 68
5.1.5 Anwendung: Bestimmung des Mittelpunkts eines Kreises (Bem) . . . 69
5.1.6 Tangentensatz (Satz) . . . 70
5.2 Winkel im Kreis . . . 71
5.2.1 Satz des Thales (Satz) . . . 71
5.2.2 Anwendung: Tangentenkonstruktion (Bem) . . . 72
5.2.3 (Def) . . . 72
5.2.4 Satz über Peripheriewinkel (Satz) . . . 73
5.2.5 (Folgerung) . . . 75
5.2.6 (Bem) . . . 75
5.3 Streckenverhältnisse am geschnittenen Kreis . . . 76
5.3.1 Sekanten-Tangenten-Satz (Satz) . . . 76
5.3.2 Sekantensatz (Satz) . . . 77
5.3.3 Sehnensatz (Satz) . . . 78
5.3.4 Tangentensatz (Satz) . . . 79
5.4 Kreise am Dreieck . . . 80
5.4.1 Inkreis (Satz) . . . 80
5.4.2 Umkreis (Satz) . . . 81

Stichwortverzeichnis

I Rechnen mit Vektoren

1.1 Der n-dimensionale Raum

Es bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen.

1.1.1 Definition (Standardraum $\mathbb{R}^n$)

Der n-dimensionale **Standardraum $\mathbb{R}^n$** ist die Menge aller geordneten Tupel von n reellen Zahlen,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

1.1.2 Bemerkung („Geordnet")

„Geordnet" bedeutet, dass die Reihenfolge entscheidend, d. h. zwei Elemente

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^n$ stimmen überein, wenn sie in jeder Komponente übereinstimmen, also $v_i = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Interpretation von Elementen im $\mathbb{R}^n$

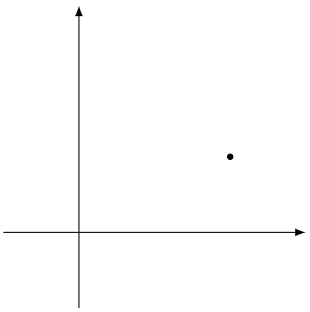
(a) als Punkt mit Ortskoordinaten $(v_1, \ldots, v_n)$ in einem kartesischen Koordinatensystem

(b) als Vektor in Richtung $(v_1, \ldots, v_n)$
Beachte: Ein Vektor ist eine Klasse von gerichteten Pfeilen, die in Richtung und Längen übereinstimmen.

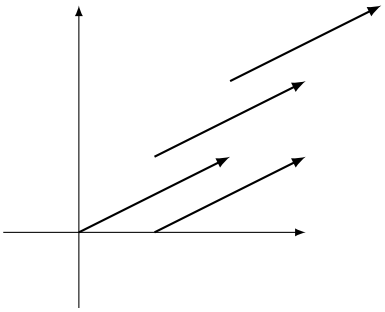
Beispiel

Was ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

(a) als Punkt

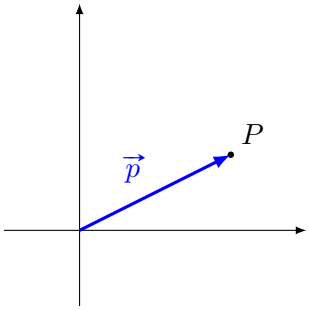


(b) als Vektor

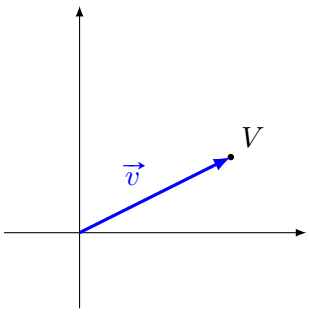


1.1.3 Bemerkung (Beziehung zwischen Punkt und Vektor)

Sei $P = (p_1, \ldots, p_n)$ ein Punkt im $\mathbb{R}^n$. Dann lässt sich P ein Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ zuordnen, der sogenannte **Ortsvektor** von P.



Andererseits: Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$. Dann kann $\vec{v}$ ein Punkt V mit Ortskoordinaten $(v_1, \ldots, v_n)$ zugeordnet werden.



Zur Unterscheidung schreiben wir Punkte als waagrechtes Tupel und bezeichnen sie mit Großbuchstaben. Vektoren schreiben wir als senkrechte Tupel und bezeichnen sie mit Kleinbuchstaben und Pfeil (z. B. $\vec{v}$).

Nullvektor und Ursprung

(a) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektor mit n Komponenten, alle sind 0, heißt **Nullvektor**.

(b) $0 = (0, \ldots, 0)$ Nullpunkt, Ursprung im Koordinatensystem.

Verbindungsvektoren

Seien P, Q zwei Puntke im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau einen Vektor $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$, sodass man beim Anhängen von $\vec{v}$ an P bei Q landet. Es ist

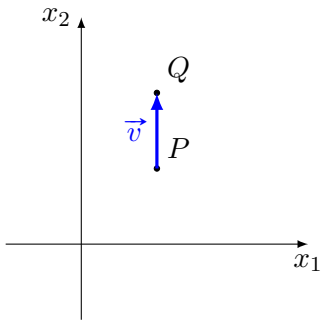
$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

In diesem Sinne gilt für den Ortsvektor $\vec{p}$ zum Punkt P

$$\vec{p} = \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Beispiel

$P(1,1)$, $Q(1,2)$



$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Vektoraddition und Skalarmultiplikation

1.2.1 Definition (Skalarmultiplikation)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Zwei Vektoren werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert, d. h.

$$\vec{v} + \vec{w} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad (\underline{\textbf{Vektoraddition}})$$

(b) Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jede Komponente des Vektors mit diesem Skalar multipliziert, d. h.

$$\lambda \cdot \vec{v} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix} \quad (\underline{\textbf{Skalarmultiplikation}})$$

ACHTUNG: Nur Vektorn gleicher Größe können addiert werden!

Beispiel

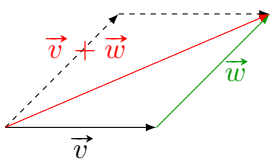
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist NICHT definiert!

Schreibweisen

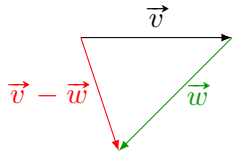
$$-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{pmatrix}$$

Anschauliche Bedeutung der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

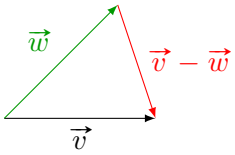
- Den Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ erhält man, indem man an den Endpunkt von $\vec{v}$ den Vektor $\vec{w}$ anhängt.



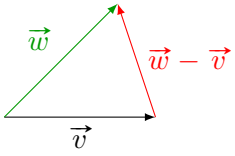
- Den Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ erhält man, indem man an den Endpunkt von $\vec{v}$ den Vektor $-\vec{w}$ anhängt.



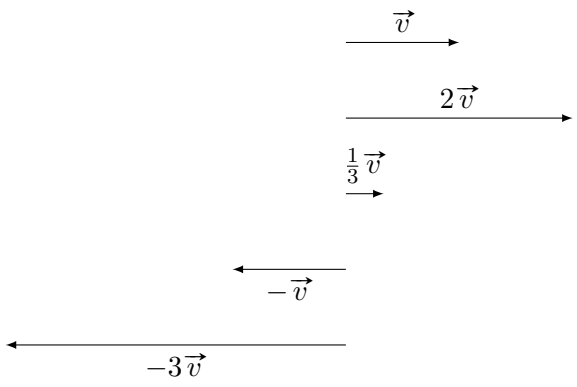
Der Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ ist derjenige Vektor, den man zu $\vec{w}$ addieren muss, um den Vektor $\vec{v}$ zu erhalten.



Den Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ erhält man, indem man den Endpunkt von $\vec{w}$ mit dem Endpunkt von $\vec{v}$ verbindet.
ACHTUNG: $\vec{v} - \vec{w} \neq \vec{w} - \vec{v}$



- Der Vektor $\lambda\vec{v}$ ensteht aus $\vec{v}$ durch Strecken/Stauchen/Umkehren.
Genauer: Ist $\lambda > 0$, so zeigt $\lambda\vec{v}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$, wird also gestreckt, falls $\lambda > 1$ und gestaucht für $0 < \lambda < 1$.
Ist $\lambda < 0$, so zeigt $\lambda\vec{v}$ in die entgegengesetzte Richtung und wird zusätzlich um den Faktor $|\lambda|$ gestreckt/gestaucht.



1.2.2 Aufgabe

$$\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+2\\3+0\\2+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$3\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-4)\\3\cdot 3\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\9\\6\end{pmatrix}$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}-3\cdots\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\6\\7\end{pmatrix}$$

1.2.3 Satz (Rechenregeln)

Seien $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Es gilt

(a) (i) Kommutativgesetz bzgl. Addition: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(ii) Assoziativgesetz bzgl. Addition: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

(iii) $\vec{0}$ ist neutrales Element: $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}$

(iv) $-\vec{v}$ ist inverses Element: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}=(-\vec{v})+\vec{v}$

(b) (i) $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

(ii) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{v}$

(iii) $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{v})$

(iv) $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

Beweis

(a),(i)

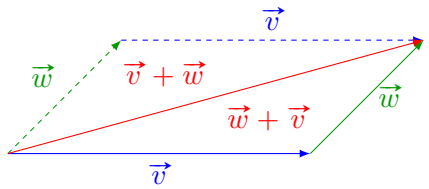
$$\vec{u}+\vec{v}\overset{\text{Def.}}{=}\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\\vdots\\u_n+v_n\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}\begin{pmatrix}v_1+u_1\\v_2+u_2\\\vdots\\v_n+u_n\end{pmatrix}\overset{\text{Def.}}{=}\vec{v}+\vec{u}$$

$(*)$ wende hier in jeder Komponente das Kommutativgesetz bzgl. + in $\mathbb{R}$ an

Rest in Übungen.

□

Kommutativgesetz anschaulich



Man sieht hier: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

1.3 Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Definition (Skalarprodukt)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Das **Skalarprodukt** von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist definiert als

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$$

Bemerkung: Das Skalarprodukt bildet zwei Vektoren ab auf eine reelle Zahl.
Manchmal ließt man auch $\vec{u} \cdot \vec{v}$ statt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

1.3.2 Aufgabe

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) + 2 \cdot (-1) = 2 + 15 - 2 = 15$$

ACHTUNG: Das Skalarprodukt ist nur definiert für zwei Vektoren gleicher Länge.

Beispiel

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist NICHT definiert!

1.3.3 Satz (Rechenregeln Skalarprodukt)

Für beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) Linearität im ersten Argument:
$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad ; \quad \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(b) Linearität im zweiten Argument:
$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \quad ; \quad \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(c) Symmetrie: $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(d) Positivität: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

Beweis

(a)

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}\rangle &= (u_1+v_1)\cdot w_1 + (u_2+v_2)\cdot w_2 + \ldots + (u_n+v_n)\cdot w_n \\ &\overset{\text{Distributivgesetz}}{=} u_1\cdot w_1 + v_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_2\cdot w_2 + \ldots + u_n\cdot w_n + v_n\cdot w_n \\ &\overset{\text{Kommutativgesetz}}{=} \underbrace{u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + \ldots + u_n\cdot w_n}_{=\langle \vec{u},\vec{w}\rangle} + \underbrace{v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2 + \ldots + v_n\cdot w_n}_{=\langle \vec{v},\vec{w}\rangle} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle &= (\lambda u_1)v_1 + \ldots + (\lambda u_n)v_n = \lambda(u_1v_1) + \ldots + \lambda(u_nv_n) \\ &= \lambda(u_1v_1 + \ldots + u_nv_n) = \lambda\,\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle\end{aligned}$$

(b)

analog (a)

(c)

$$\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle = v_1u_1 + \ldots + v_nu_n \overset{(*)}{=} u_1v_1 + \ldots + u_nv_n = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$$

$(*)$ Kommutativgesetz bzgl $\cdot$ in $\mathbb{R}$

(d)

Es ist

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = v_1v_1 + \ldots + v_nv_n = v_1^2 + \ldots + v_n^2 \quad (\mathfrak{Q})$$

Da jeder Summand als Quadrat einer rellen Zahl größer gleich 0 ist, ist auch die Summe größer gleich 0, also

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0$$

Wir zeigen nun noch $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ in zwei Schritten:

$(\Rightarrow)$

Ist $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = 0$, so folgt mit $(\mathfrak{Q})$, dass $v_1^2 + \ldots + v_n^2 = 0$. Damit die Summe von den nichtnegativen Zahlen v_i^2 dann 0 ergibt, muss bereits jeder Summand 0 sein, also $v_i^2 = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Also ist $v_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Damit folgt $\vec{v} = \vec{0}$.

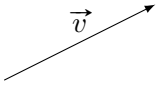
$(\Leftarrow)$

Ist $\vec{v} = \vec{0}$, so folgt:

$$\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = \left\langle \vec{0}, \vec{0}\right\rangle = 0^2 + \ldots + 0^2 = 0$$

□

1.4 Länge eines Vektors



1.4.1 Definition (Euklidische Länge bzw. Norm und Abstand)

Die **(euklidische) Länge** oder auch **(euklidische) Norm** des Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Der **Abstand** zweier Punkte P, Q im $\mathbb{R}^n$ ist definiert als die Norm des Verbindungsvektors

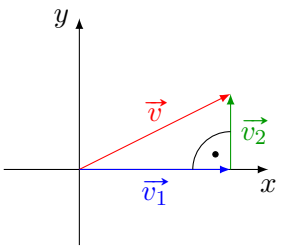
$$d(P,Q) := \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \ldots + (q_n - p_n)}$$

1.4.2 Bemerkung (Pythagoras)

Für Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ergibt sich

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Anschaulich:



Mit Pythagoras gilt: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

1.4.3 Aufgabe

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$$

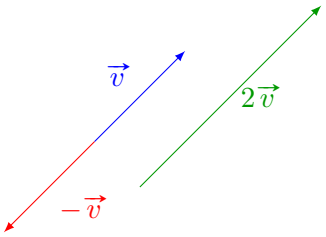
Die Norm $\|.\|$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

1.4.4 Satz (Eigenschaften der Norm)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$ und es gilt: $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

(b) $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$



(c) „Binomische Formeln“

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2$
- $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Beweis

(a)

Nach Satz 1.3.3 gilt: $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle \geq 0$. Wurzelziehen liefert

$$\|\vec{v}\| \overset{\text{Def. 1.4.1}}{=} \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle} \geq 0$$

Ebenfalls mit Satz 1.3.3,(d) folgt

$$\|\vec{v}\| = 0 \iff \|\vec{v}\|^2 = \langle\vec{v},\vec{v}\rangle \iff \vec{v} = \vec{0}$$

(b)

$$\|\lambda\cdot\vec{v}\|^2 \overset{\text{Def. 1.4.1}}{=} \langle\lambda\vec{v},\lambda\vec{v}\rangle \overset{(*)}{=} \lambda\cdot\langle\vec{v},\lambda\vec{v}\rangle \overset{(*)}{=} \lambda\cdot\lambda\cdot\langle\vec{v},\vec{v}\rangle = \lambda^2\cdot\|\vec{v}\|^2$$

Also gilt

$$\|\lambda\vec{v}\|^2 = \lambda^2\cdot\|\vec{v}\|^2$$

Ziehe jetzt Wurzel, beachte, dass $\|\lambda\vec{v}\| \geq 0$, $\|\vec{v}\| \geq 0$ nach (a). Dann folgt

$$\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$$

(c)

- $$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= \langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle \overset{(*)}{=} \langle\vec{u},\vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle \overset{(*)}{=}\\ &= \langle\vec{u},\vec{u}\rangle + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{u}\rangle + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle\\ &\overset{\text{Symmetrie,Satz 1.3.3,(c)}}{=} \langle\vec{u},\vec{u}\rangle + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle\vec{v},\vec{v}\rangle\\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle\vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$
- analog
- analog

□

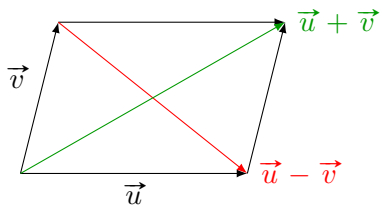
(∗) Linearität im 1. bzw. 2. Argument, Satz 1.3.3,(a) bzw. (b)

1.4.5 Satz (Parallelogrammgleichung, Polarisationsgleichung)

Für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) Parallelogrammgleichung

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$$



(b) Polarisationsgleichung

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

Beweis

Übungsaufgabe.

□

1.4.6 Satz (Zwei wichtige Ungleichungen)

Für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

Gleichheit herrscht hier genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Dreiecksungleichung

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

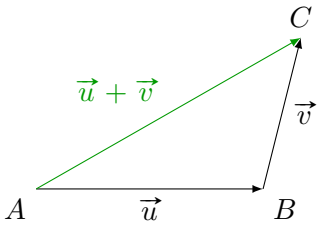
Gleichheit herrscht hier genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ für ein $\lambda \geq 0$.

Beweis

Zentralübung.

□

Dreiecksungleichung anschaulich:



$$\left.\begin{array}{l} b < a + c \\ c < a + b \\ a < b + c \end{array}\right\} \text{ gilt in jedem Dreieck.}$$

Aus den Eigenschaften der Norm folgt:

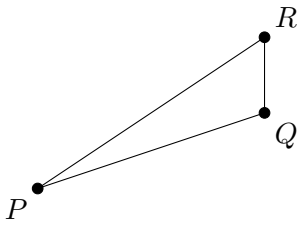
1.4.7 Satz (Eigenschaften der Abstandsfunktion d)

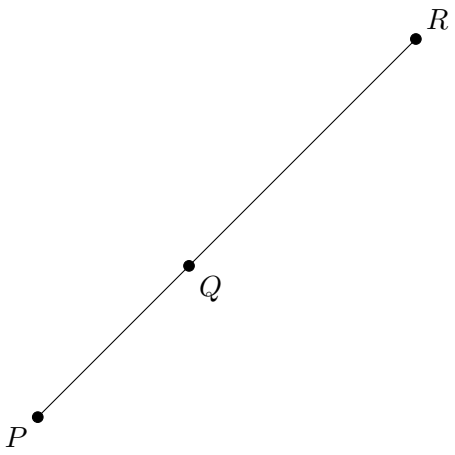
Seien P, Q, R Punkte in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(a) $d(P,Q) \geq 0$ und $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

(b) $d(P,Q) = d(Q,P)$

(c) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$





Beweis

(a)

$d(P,Q) \overset{\text{Def. } 1.4.1}{=} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \geq 0$ nach Satz 1.4.4,(a) und

$d(P,Q) = 0 \overset{\text{Def. } d}{\iff} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = 0 \overset{1.4.4,(a)}{\iff} \overrightarrow{PQ} = \vec{0} \iff P = Q$

(b)

$$d(P,Q) \overset{\text{Def.}}{=} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|-\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|(-1)\cdot\overrightarrow{QP}\right\| \overset{\text{Satz } 1.4.4,(b)}{=} |-1|\cdot\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = d(Q,P)$$

(c)

$$d(P,R) = \left\|\overrightarrow{PR}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right\| \overset{(*)}{\leq} \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| + \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = d(P,Q) + d(Q,R)$$

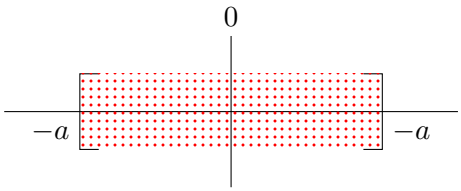
$(*)$ Dreiecksungleichung, Satz 1.4.6,(b)

□

1.5 Winkel zwischen zwei Vektoren

Nach der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung gilt für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \iff -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \leq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

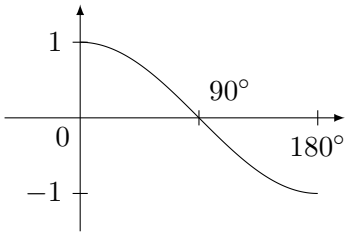


$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Falls $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\vec{v} \neq 0$: teile diese Ungleichung durch $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ $(\neq 0)$ und erhalte

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$$

Die Kosinus-Funktion ist eingeschränkt auf das Intervall $[0°, 180°]$ eine umkehrbare Funktion, die jedem Winkel $\vartheta \in [0°, 180°]$ genau eine reelle Zahl aus $[-1, 1]$ zuordnet.



Da $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 1}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$ existiert, also genau ein $\vartheta \in [0°, 180°]$, so dass $\cos(\vartheta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. Dies benutzten wir für die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren:

1.5.1 Definition (Winkel zwischen zwei Vektoren)

(a) Der Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ zwischen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$, beide $\neq \vec{0}$, ist definiert über

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) \in [0°, 180°]$$

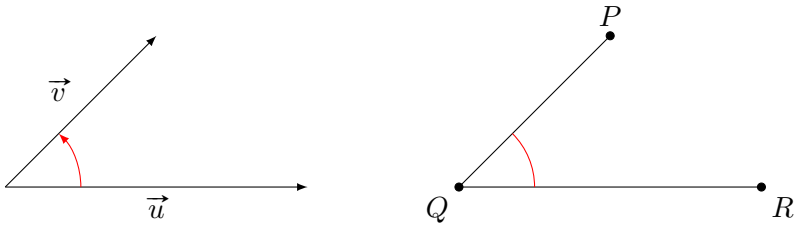
(b) Sind P, Q, R Punkte im $\mathbb{R}^n$, so schreiben wir $\angle(P, Q, R)$ statt $\angle\left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP}\right)$.

(c) Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ heißen **orthogonal** oder **senkrecht**, wenn

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Schreibe dann $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ACHTUNG: Die Schreibweise mit $\angle$ bedeutet, dass wir den nichtorientierten Winkel nehmen, also den Winkel zwischen 0° und 180°.
Insbesondere ist hier $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$ und $\angle(P, Q, R) = \angle(R, Q, P)$.



Den orientierten Winkel (der Werte zwischen $0°$ und $360°$ angibt) bezeichnen wir mit $\sphericalangle$.

1.5.2 Aufgabe

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \angle(\vec{u}, \vec{v}) &= \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{420}}\right) \approx 0.75 \quad \text{(Bogenmaß)} \ \approx 43° \end{aligned}$$

1.5.3 Satz (Cosinussatz)

Für $\vec{u}, \vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)$$

Beweis

Nach Definition 1.5.1 ist $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)$. Setze dies in die „zweite binomische Formel“ aus Satz 1.4.4,(c) ein:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)$$

□

1.5.4 Lemma (Orthogonale Vektoren)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

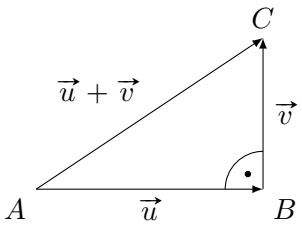
(a) $\vec{u} \perp \vec{v}$

(b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

(c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

(d) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

zeige hier am besten $b \iff a$, $b \iff c$ und $b \iff d$



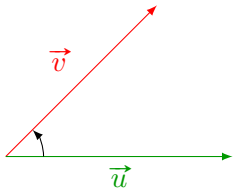
Beweis

Übungsaufgabe.

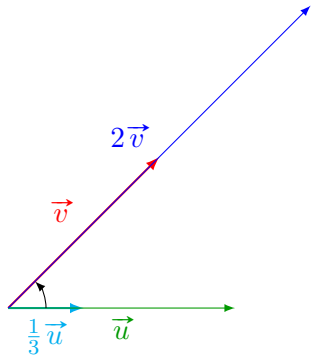
□

Weitere Eigenschaften des Winkelmaßes (Beweis teilweise in Übungen):

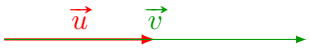
- $\angle(\vec{u},\vec{v}) = \angle(\vec{v},\vec{u})$



- Der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ hängt NICHT von der Länge der Vektoren ab, sondern nur von deren Richtung.
  $\angle(\lambda\vec{u},\mu\vec{v}) = \angle(\vec{u},\vec{v})$ für alle $\lambda,\mu > 0$



- $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0° \iff \vec{u} = \beta\vec{v}$ für ein $\beta > 0$
  Also: 2 Vektoren schließen genau dann einen 0°-Winkel ein, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen.



- $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 180° \iff \vec{u} = \beta\vec{v}$ für ein $\beta > 0$.
  Also: 2 Vektoren schließen genau dann einen 180°-Winkel ein, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind.



II Geraden, Strecken, Halbgeraden

2.1 Parameterform einer Geraden

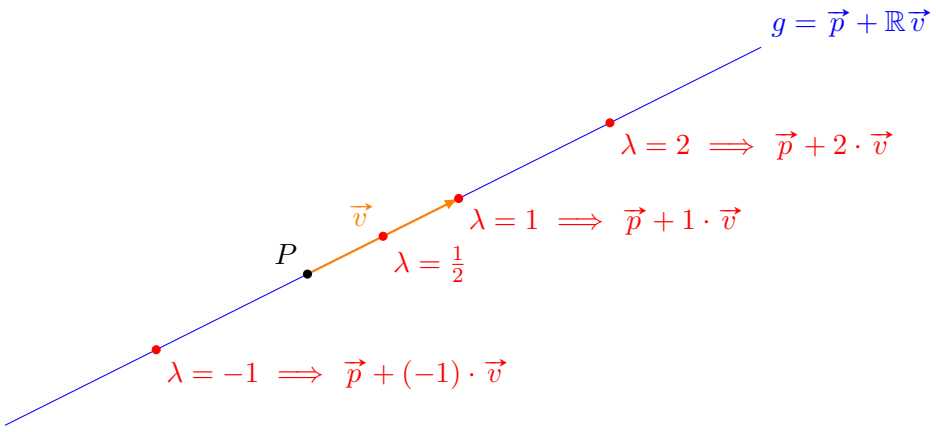
Eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ wird in der analytischen Geometrie durch einen Punkt und eine Richtung angegeben.

2.1.1 Definition (Parameterform einer Geraden)

Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$. Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Dann bildet die Menge

$$g = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v} = \left\{ \vec{p} + \lambda \vec{v} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade durch P in Richtung $\vec{v}$. Diese Darstellung nennt man **Parameterform** der Geraden g. Der Punkt P heißt **Aufpunkt** der Geraden g, der Vektor $\vec{v}$ heißt **Richtungsvektor** von g.



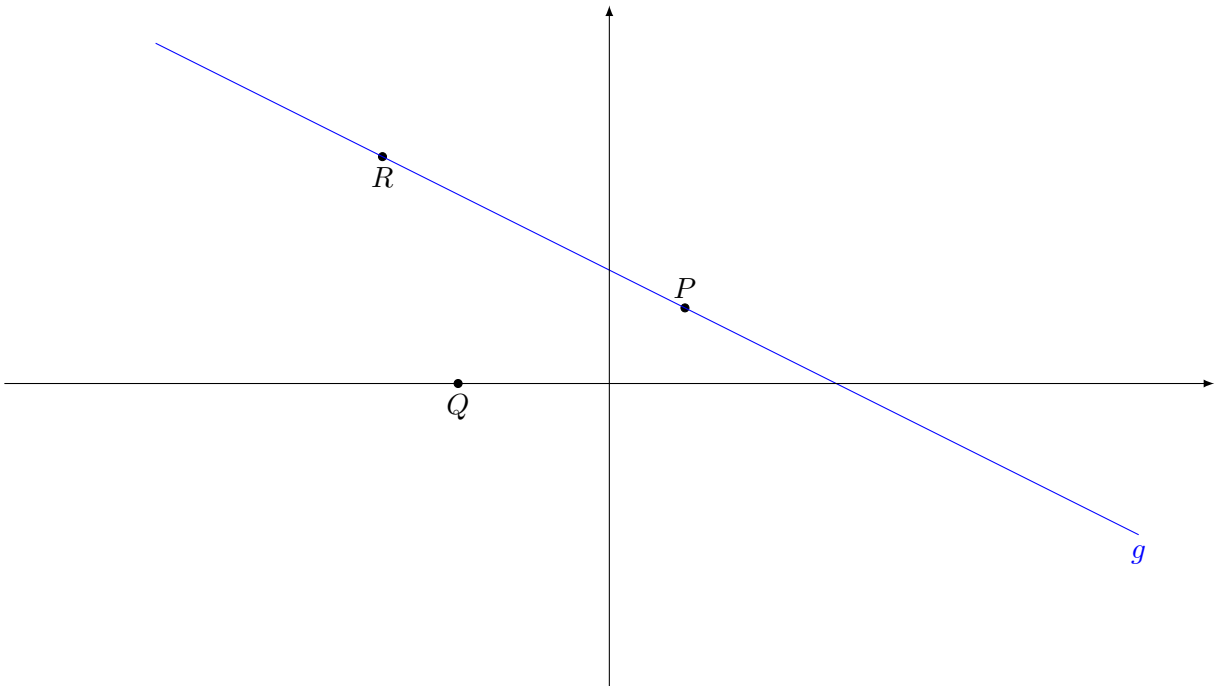
Wir schreiben $Q \in g$, wenn für seinen Ortsvektor $\vec{q}$ gilt:

$$\vec{q} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

Jeder Parameterwert λ liefert also einen Punkt auf der Geraden g.
Insbesondere ist $\vec{p} = \vec{p} + 0 \cdot \vec{v}$, also $P \in g$.

2.1.2 Aufgabe

$g = \binom{1}{1} + \mathbb{R}\binom{2}{-1}$, $Q(-2,0) \in g$?



Frage: Existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\binom{-2}{0} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{2}{-1}$?

Die Vektorgleichung liefert Gleichungssystem $\begin{cases} -2 = 1 + 2\lambda & (1) \\ 0 = 1 - \lambda & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $\lambda = 1$. Einsetzen in (1): $(-2) \neq 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$\Longrightarrow \mathbb{Q} \notin g$

$R(-3, 3)$. Frage: $R \in g$?

Ansatz: $\binom{-3}{3} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{2}{-1} \implies \begin{cases} -3 = 1 + 2\lambda & (1) \\ 3 = 1 - \lambda & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $2 = -\lambda \implies \lambda = -2$.

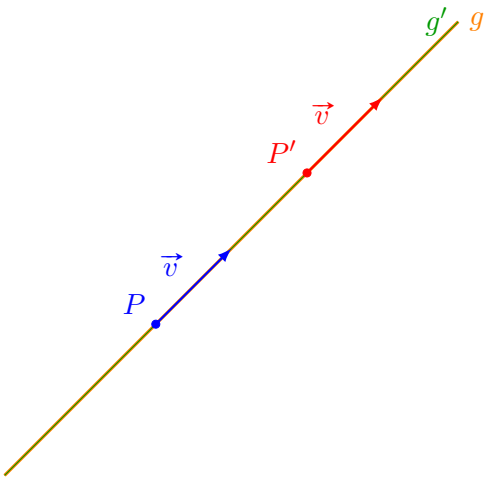
Einsetzen in (1): $-3 = 1 + 2 \cdot (-2) = 1 - 4$ ✓

Also gilt: $\binom{-3}{3} = \binom{1}{1} - 2\binom{2}{-1}$, daher gilt: $R \in g$.

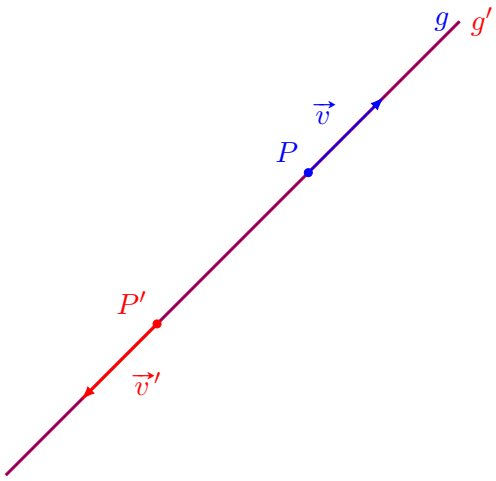
ACHTUNG: Aufpunkt und Richtungsvektor einer Geraden in Parameterform sind durch die Gearde NICHT eindeutig bestimmt!

2.1.3 Satz ()

(a) Sei $g = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit Aufpunkt P und Richtungsvektor $\vec{v}$. Ist P' ein Punkt auf der Geraden g und ist $g' = \vec{p}' + \mathbb{R}\vec{v}$ die Gerade mit Aufpunkt P' und Richtungsvektor $\vec{v}$, so stimmen g und g' überein.



(b) Seien $g = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}$ und $g' = \vec{p}' + \mathbb{R} \cdot \vec{v}'$ zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$. Dann stimmen diese Geraden genau dann überein, wenn $g \cap g' \neq \emptyset$ und $\vec{v}' = \beta \cdot \vec{v}$ für eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.



Beweis

(a)

Da $P' \in g$ existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{p}' = \vec{p} + \mu \cdot \vec{v}$ $(*)$.

Zeige $g = g'$ in zwei Schritten:

1. Schritt

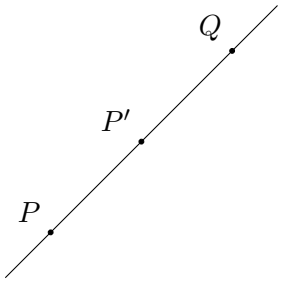
Zeige $g \subseteq g'$!

Sei $Q \in g$. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{q} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$

Wir rechnen:

$$\vec{q} = \vec{p} + \lambda\vec{v} + \underbrace{\mu\vec{v} - \mu\vec{v}}_{=\vec{0}} = \underbrace{\vec{p} + \mu\vec{v}}_{\overset{(+)}{=}\vec{p}'} + \lambda\vec{v} - \mu\vec{v} = \vec{p}' + (\lambda - \mu)\vec{v}$$

Es folgt: $Q \in g'$ also folgt $g \subseteq g'$.



2. Schritt

Zeige $g' \subseteq g$!

Sei $Q' \in g'$. Dann gibt es ein $\lambda' \in \mathbb{R}$ mit $\vec{q}' = \vec{p}' + \lambda' \cdot \vec{v}$

Wir rechnen:

$$\vec{q}' = \vec{p}' + \lambda' \cdot \vec{v} + \underbrace{\mu\vec{v} - \mu\vec{v}}_{=\vec{0}} = \underbrace{\vec{p}' - \mu\vec{v}}_{\overset{(*)}{=}\vec{p}} + \lambda'\vec{v} + \mu\vec{v} = \vec{p} + (\lambda + \mu)\vec{v}$$

Es folgt: $Q' \in g$. Damit $g' \subseteq g$.

Insgesamt folgt: $g = g'$.

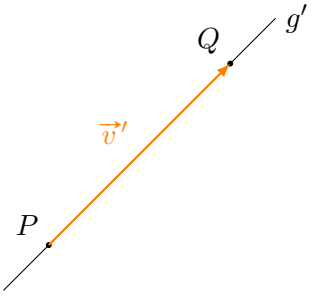
(b), ($\Rightarrow$)

Es gelte $g = g'$. Dann ist $g \cap g' \neq \emptyset$. Bleibt zu zeigen: $\vec{v}' = \beta\vec{v}$ für ein $\beta \neq 0$.

Da $P \in g$ und $g = g'$ folgt: $P \in g'$.

Nach (a) lässt sich daher g' schreiben als $g' = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}'$

Wähle Q als den Punkt auf der Geraden g', der aus P durch Anhängen von $\vec{v}'$ entsteht, also $\vec{q} = \vec{p} + \vec{v}'$ (1).



Da $g = g'$ und $Q \in g'$, folgt: $Q \in g$, damit existiert eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\vec{q} = \vec{p} + \beta \cdot \vec{v}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: $\vec{p} + \vec{v}' = \vec{p} + \beta\vec{v} \implies \vec{v}' = \beta\vec{v}$

Da $\vec{v}' \neq \vec{0}$ (nach Voraussetzung) folgt, dass $\beta \neq 0$

(b), ($\Leftarrow$)

Es gelte $g \cap g' \neq \emptyset$ und $\vec{v}' = \beta\vec{v}$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Zeige: $g = g'$.

Da $g \cap g' \neq \emptyset$ existiert ein Punkt $P^* \in g \cap g'$.

Nach (a) darf man P^* als Aufpunkt von g und g' wählen, also

$$g = \vec{p}^* + \mathbb{R}\vec{v} \quad , \quad g' = \vec{p}^* + \mathbb{R}\vec{v}'$$

Zeige $g = g'$ in zwei Schritten:

1. Schritt

Zeige $g \subseteq g'$

Sei $Q \in g$. Dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{q} = \vec{p}^* + \lambda\vec{v}$. Wir rechnen

$$\vec{q} = \vec{p}^* + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \underbrace{\beta \cdot \vec{v}}_{=\vec{v}'} = \vec{p}^* + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \vec{v}'$$

Es folgt: $Q \in g'$. Also $g \subseteq g'$.

2. Schritt

Zeige: $g' \subseteq g$.

Sei $Q' \in g'$. Dann existiert $\lambda' \in \mathbb{R}$ mit $\vec{q}' = \vec{p}^* + \lambda'\vec{v}'$. Wir rechnen:

$$\vec{q}' = \vec{p}^*\lambda' \cdot \beta \cdot \underbrace{\frac{1}{\beta} \cdot \vec{v}}_{=\vec{v}} = \vec{q}' = \vec{p}^* + \lambda' \cdot \beta \cdot \vec{v}'$$

Es folgt $Q \in g$, also $g \subseteq g'$.

Insgesamt folgt: $g = g'$.

□

2.1.4 Folgerung

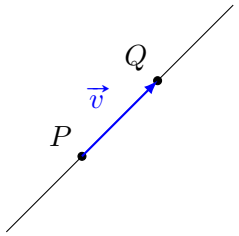
Zu je zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Gerade g, die P und Q enthält, die sogenannte **Verbindungsgerade** (P, Q). DIese Gerade lässt sich in Parameterdarstellung schreiben als

$$g = g(P, Q) = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Diese Darstellung nennt man auch **Zweipunktform** der Geraden.

Beweis

Existenz: Da $P \neq Q$ ist $\vec{v}. = \overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$. Daher beschreibt g eine Gerade. Da $\vec{p} = \vec{p} + 0 \cdot \overrightarrow{PQ}$ (also wähle $\lambda = 0$) folgt $P \in g$.



Da $\vec{q} = \vec{p} + (\vec{q} - \vec{p}) = \vec{p} + 1 \cdot \overrightarrow{PQ}$ (also $\lambda = 1$) folgt $Q \in g$.

Eindeutigkeit: Sei g' eine weitere Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit $P \in g'$ und $Q \in g'$. Da $P \in g'$, lässt sich nach Satz 2.1.3,(a) die Gerade g' schreiben als

$$g' = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}'$$

für einen RIchtungsvektor $\vec{v}' \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}' \neq 0$.

Da $Q \in g'$ und $P \neq Q$ existiert $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ mit $\vec{q} = \vec{p} = \lambda \cdot \vec{v}'$.

Es folgt:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \overset{\text{s.o.}}{=} (\vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}') - \vec{p} = \lambda \cdot \vec{v}'$$

Mit Satz 2.1.3,(b) folgt $g = g'$.

□

2.1.5 Beispiel (Beispiel zur Folgerung 2.1.4)

Gerade durch $P(-3,3)$ und $Q(3,0)$ ist

$$g = g(P,Q) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Dies ist die gleich Gerade wie in Aufgabe 2.1.2.

2.1.6 Bemerkung (Gerade als Lösungsmenge)

Im $\mathbb{R}^2$ kann jede Gerade parameterfrei als Lösungsmenge einer linearen Gleichung der Form

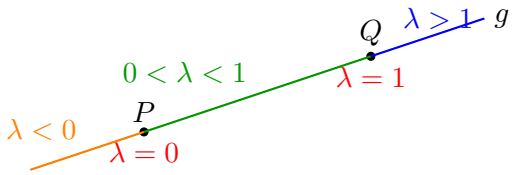
$$ax + by = c \quad \text{mit } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ mit } (a,b) \neq (0,0)$$

2.2 Strecken und Halbgeraden

Sei $g = g(P,Q)$ die Gerade durch zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Sei R ein weiterer Puntk auf g, d. h.

$$\vec{r} = \vec{p} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann beschreibt λ die Lage des Punktes R hinsichtlich P und Q.



2.2.1 Definition (Strecke, Länge einer Strecke)

Seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$. Die **Strecke** $\overline{PQ}$ ist die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^n$, die auf der Verbindungsgeraden von P und Q zwischen P und Q liegen. Die Strecke $\overline{PQ}$ kann dargestellt werden als

$$\overline{PQ} = \left\{ \vec{p} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \;\middle|\; \lambda \in [0,1] \right\}$$

Die **Länge der Strecke** $\overline{PQ}$ wird mit $|\overline{PQ}|$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$|\overline{PQ}| = d(P,Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$$

2.2.2 Bemerkung ()

- Es ist $\overline{PQ} = \overline{QP}$.

- Zwei Strecken sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Endpunten übereinstimmen, d. h.

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'} \iff (P = P' \ \wedge \ Q = Q') \ \vee \ (P = Q' \ \wedge \ Q = P')$$

2.2.3 Aufgabe

$P(-3,3)$ und $Q(3,0)$. Liegt $R(-1,2)$ auf $\overline{PQ}$?

Ansatz: $\binom{-1}{2} = \binom{-3}{3} + \lambda\binom{6}{-3} \implies \begin{cases} -1 = -3 + 6\lambda & (1) \\ 2 = 3 - 3\lambda & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $\lambda = \frac{1}{3}$. Probe in (1): $-1 = -3 + 6 \cdot \frac{1}{3}$ ✓.

Da $\vec{r} = \vec{p} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ folgt: $R \in \overline{PQ}$.

Es sei $\mathbb{R}^+ := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \ \middle| \ \lambda \geq 0 \right\}$ und $\mathbb{R}^- := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \ \middle| \ \lambda \leq 0 \right\}$.

2.2.4 Definition (Halbgerade)

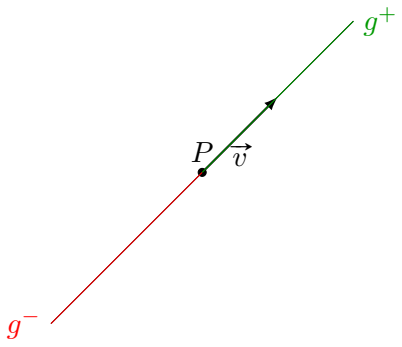
Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^n$, sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Die Menge

$$g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+ cdot \vec{v} = \left\{ \vec{p} + \lambda\vec{v} \ \middle| \ \lambda \geq 0 \right\}$$

nennt man **Halbgerade** mit Anfangspunkt P in Richtung $\vec{v}$.
Ist $Q \in g^+$ mit $P \neq Q$, so schreibe auch PQ^+ für die Halbgerade mit Anfangspunkt P in Richtung von $\overrightarrow{PQ}$.
Ist $g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+ \cdot \vec{v}$ eine Halbgerade ist, so ist

$$g^- := \vec{p} + \mathbb{R}^- \cdot \vec{v} = \left\{ \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} \ \middle| \ \lambda \leq 0 \right\}$$

eine Halbgerade mit Anfangspunkt P in Richtung $-\vec{v}$. Man nennt g^- die zu g^+ **komplementäre Halbgerade**.



2.3 Kollinearität, Lagebeziehungen zwischen Geraden

2.3.1 Definition (kollinear)

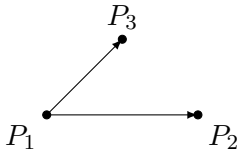
(a) Wir nennen Punkte $P_1, \ldots, P_k$ im $\mathbb{R}^n$ **kollinear**, wenn sie alle auf einer Geraden liegen.

(b) Seien $\vec{v}\,\vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wir nennen $\vec{v}, \vec{w}$ kollinear, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, gibt mit $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

2.3.2 Bemerkung (kollinear)

Zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$ sind kollinear genau dann, wenn je zwei Verbindungsvektoren kollinear sind.





- Drei nicht-kollineare Punkte bilden ein (echtes) Dreieck.
- Zwei kollineare Vektoren nennt man auch „linear abhängig“.
- Zwei nicht-kollineare Vektoren spannen eine Ebene auf.

2.3.3 Satz ()

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

(a) $\vec{v}, \vec{w}$ sind genau dann kollinear, wenn $\underbrace{\mathbb{R}\vec{v}}_{=\vec{0}+\mathbb{R}\vec{v}} = \mathbb{R}\vec{w}$.

(b) $\vec{v}, \vec{w}$ sind genau dann nicht-kollinear, wenn aus $\mu\vec{v} = \nu\vec{w}$ folgt: $\mu = 0 = \nu$.

Beweis

(a) folgt direkt aus Satz 2.1.3,(b).

(b),($\Rightarrow$) Seien $\vec{v}, \vec{w}$ nicht-kollinear (d. h. es gibt KEIN $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\vec{v} = \lambda\vec{w}$).
Seien $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\mu\vec{v} = \nu\vec{w}$.
Ist $\mu \neq 0$, so teile Gleichung durch μ und erhalte

$$\vec{v} = \frac{\nu}{\mu} \cdot \vec{w}$$

Da $\vec{v} \neq \vec{0}$ folgt: $\frac{\nu}{\mu} \neq 0$. Also existiert $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nämlich $\lambda = \frac{\nu}{\mu}$, mit $\vec{v} = \lambda\vec{w}$ $\lightning$
$\vec{v}, \vec{w}$ NICHT kollinear.
Es folgt $\mu = 0$ und damit auch $\nu = 0$.

(b),($\Leftarrow$) Zeige: Wenn aus $\mu\vec{v} = \nu\vec{w}$ folgt: $\mu = \nu = 0$, so sind $\vec{v}, \vec{w}$ nicht-kollinear. Zeige dies indirekt, d. h. wir zeigen: Sind $\vec{v}, \vec{w}$ kollinear, so existieren $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, nicht beide $= 0$, mit

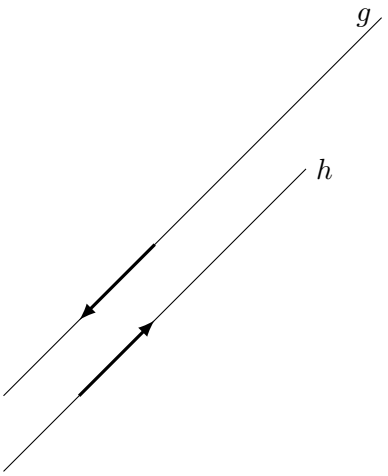
$\mu\vec{v} = \nu\vec{w}$.
Hierzu: Nach unserer Voraussetzung sind $\vec{v}, \vec{w}$ kollinear, d. h. es existiert $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\vec{v} = \lambda\vec{w}$. Für $\mu = 1$ und $\nu = \lambda$ gilt also $\mu\vec{v} = \nu\vec{w}$, obwohl beide Zahlen $\mu, \nu \neq 0$ sind.

□

2.3.4 Definition (Geraden – parallel bzw. windschief)

Seien $g = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v}$, $h = \vec{q} + \mathbb{R}\vec{w}$ zwei geraden im $\mathbb{R}^n$.

(a) Wir nennen g und h **parallel** (schreibe $g \parallel h$), wenn die Richtungsvektoren kollinear sind.



(b) Sei $n \geq 3$. Die zwi Geraden g und h heißen **windschief**, wenn sie sich NICHT schneiden ($g \cap h = \emptyset$) und sie NICHT parallel sind.

Wir nenne zwei Geraden g, h **echt parallel**, wenn $g \neq h$ und $g \parallel h$.

2.3.5 Bemerkung ()

Im $\mathbb{R}^2$ können für Geraden g, h nur drei Fälle auftreten.

(1) $g = h$

(2) g und h echt parallel

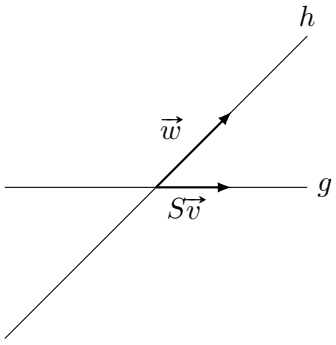
(3) g und h schneiden sich in genau einem Punkt.

Ist $n \geq 3$, so gibt es daneben auch noch windschiefe Geraden.

2.4 Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden

2.4.1 Definition (Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden)

(a) Seien $g = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v}$ und $h = \vec{q} + \mathbb{R}\vec{w}$ zwei sich schneidende Geraden im $\mathbb{R}^n$.

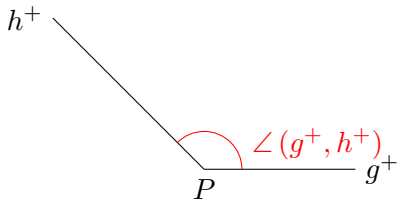


Der Winkel $\angle(g,h)$ zwischen den Geraden g und h wird definiert als

$$\angle(g,h) = \arccos\left(\frac{|\langle \vec{v},\vec{w}\rangle|}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right) \quad \in [0°, 90°]$$

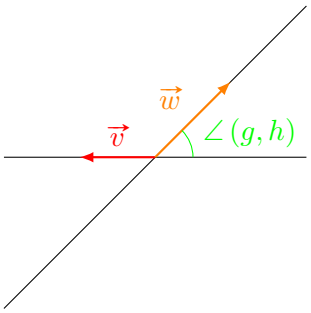
(b) Seien $g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+\vec{v}$ und $h^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+\vec{w}$ zwei Halbgeraden im $\mathbb{R}^n$ mit Startpunkt P. Der Winkel zwischen den Halbgeraden g^+ und h^+ ist definiert als

$$\angle(g^+,h^+) = \angle(\vec{v},\vec{w}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v},\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\right) \quad \in [0°, 180°]$$

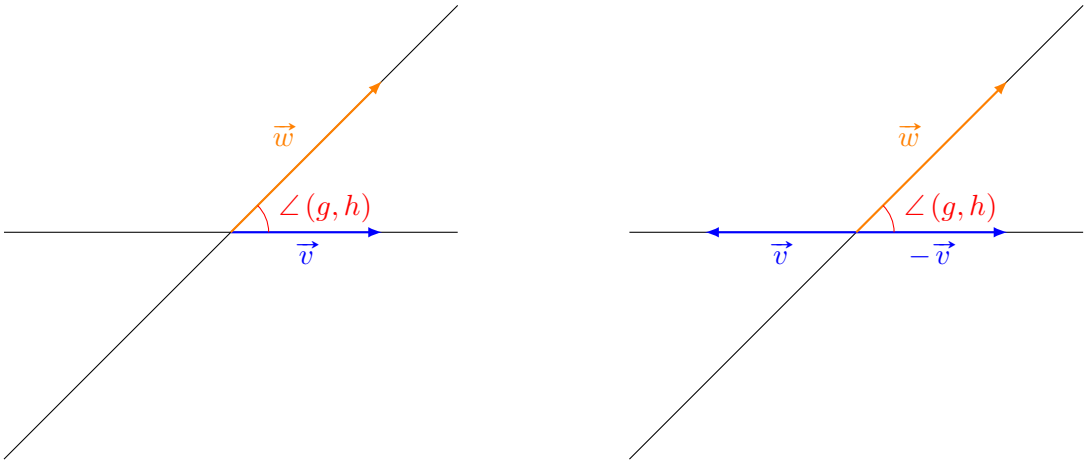


2.4.2 Bemerkung (Wohldefiniertheit des Winkels zwischen (Halb)Geraden)

(a) Der Winkel zwischen Geraden/Halbgeraden ist wohldefiniert, d. h. der Winkel hängt NICHT von der Parameterdarstellung ab.

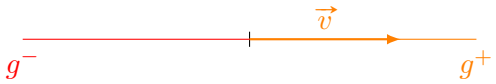


(b) Der Winkel zwischen Geraden ist immer ein spitzer oder rechter Winkel. Je nach Lage ist $\angle(g,h) = \angle(\vec{v},\vec{w})$ oder $\angle(g,h) = \angle(-\vec{v},\vec{w})$



(c) Für Winkel $\angle(g^+, h^+)$ nennt man die Halbgeraden auch Schenkel des Winkels.

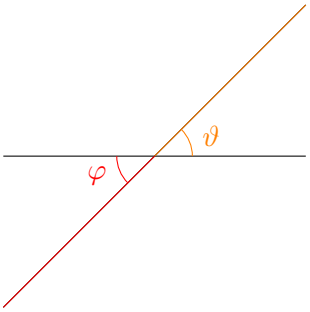
(d) Ist $g^+ = h^+$, so ist $\angle(g^+, h^+) = 0°$. Ist $h^+ = g^-$, so ist $\angle(g^-, h^+) = 180°$.



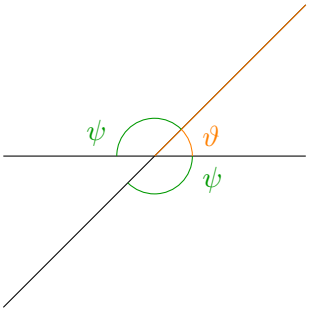
(e) Nach Definition 1.5.1 ist $\angle(Q, P, R) = \angle(PQ^+, PR^+)$

2.4.3 Definition (Scheitelwinkel, Nebenwinkel)

(a) Zwei Winkel ϑ und φ heißen **Scheitelwinkel**, wenn ihre Schenkel komplementäre Halbgeraden sind.



(b) Zwei Winkel ϑ und ψ heißen **Nebenwinkel**, wenn sie einen Schenkel gemeinsam haben und die beiden anderen Schenkel komplementäre Halbgeraden sind.

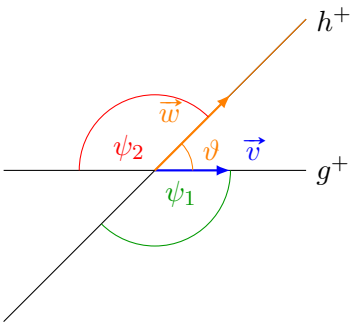


2.4.4 Satz (Nebenwinkel, Scheitelwinkel)

(a) Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

(b) Scheitelwinkel sind gleich groß.

Beweis

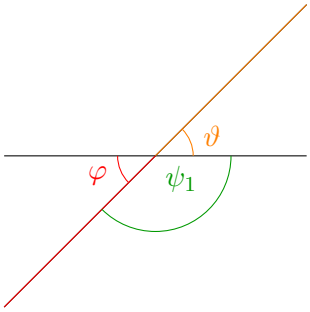


Seien $g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+\vec{v}$ und $h^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+\vec{w}$. Sei $\vartheta = \angle(g^+, h^+) = \angle(\vec{v}, \vec{w})$.

(a) Es gibt dann zu ϑ zwei Nebenwinkel, nämlich $\psi_1 = \angle(-\vec{v}, \vec{w})$ und $\psi_2 = \angle(\vec{v}, -\vec{w})$. Mit Aufgabe 17,(c) aus der Übung folgt dann

$$\psi_1 = \psi_2 = 180° - \angle(\vec{v}, \vec{w}) = 180° - \vartheta$$

(b) Sei φ Scheitelwinkel zu ϑ. Dann sind φ und ψ_1 Nebenwinkel.



Damit folgt:

$$\varphi \overset{(*)}{=} 180° - \psi_1 \overset{(**)}{=} \vartheta$$

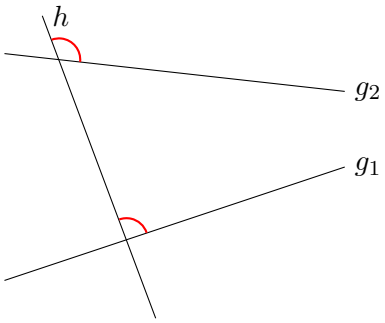
$(*)$ Aussage (a): φ, ψ_1 sind Nebenwinkel
$(**)$ Aussage (a): ψ_1 und ϑ sind Nebenwinkel.

□

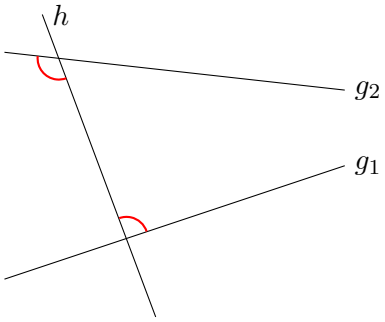
2.4.5 Definition (Stufenwinkel, Wechselwinkel)

Seien g_1, g_2 Geraden im $\mathbb{R}^2$, die von einer dritten Geraden h geschnitten werden.
Für die an den beiden Schnittpunkten von g_1 und h bzw. g_2 und h enstandenen Winkel führen wir folgende Bezeichnungen ein:

(a) Zwei Winkel heißen **Stufenwinkel** oder **F-Winkel**, wenn sie in derselben Halbebene bzgl. h liegen und ihre auf h liegenden Schenkel gleichgerichtet sind.



(b) Zwei Winkel heißen **Wechselwinkel** oder **Z-Winkel**, wenn sie in verschiedenen Halbebenen bzgl. h liegen und ihre auf h liegenden Schenkel entgegengerichtet sind.

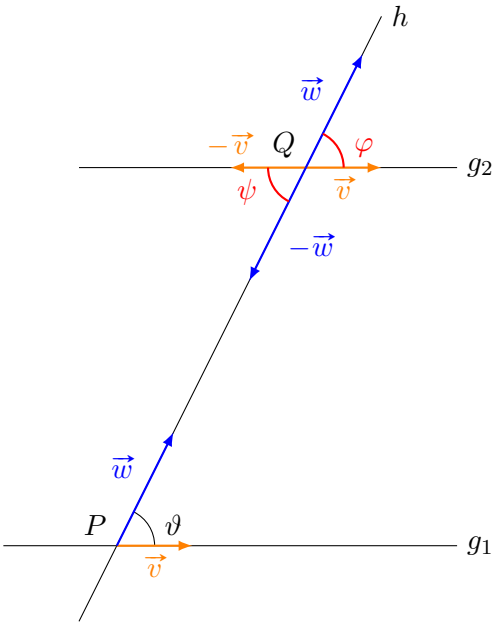


2.4.6 Satz ()

Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$, die von einer dritten Geraden h geschnitten werden. Ist $g_1 \parallel g_2$, so gilt:

(a) Stufenwinkel sind gleich groß.

(b) Wechselwinkel sind gleich groß.



Beweis

Da $g_1 \parallel g_2$, so lassen sich g_1 und g_2 mit dem gleichen Richtungsvektor beschreiben.
Sei $g_1 \cap h = \{P\}$ und $g_2 \cap h = \{Q\}$. Dann lassen sich g_1, g_2 schreiben als

$$g_1 = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v} \quad , \quad g_2 = \vec{q} + \mathbb{R}\vec{v}$$

Da $P, Q \in H$, so lässt sich h schreiben als

$$h = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{w}$$

mit $\vec{w} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Sei $\vartheta = \angle(g_1^+, h^+) = \angle(\vec{v}, \vec{w})$.

(a) Der zu ϑ gehörige Stufenwinkel φ ist dann gegeben als

$$\varphi = \angle(g_2^+, h^+) = \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \vartheta$$

(b) Der zu ϑ gehörige Wechselwinkel ψ ist gegeben durch

$$\psi = \angle(g_2^-, h^-)$$

Nach Definition 2.4.3 bilden φ und ψ Scheitelwinkel und sind damit gleich groß. Es folgt mit (a): $\varphi = \psi = \vartheta$.

□

III Strahlensatz und Folgerungen

3.1 Teilverhältnis

3.1.1 Definition ()

Seien P, Q, R, S Punkte im $\mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$ und $R \neq S$ und seien $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ kollinear. Dann ist das Teilverhältnis von $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ die reelle Zahl λ mit

$$\overrightarrow{RS} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Schreibe

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}$$

Beispiel

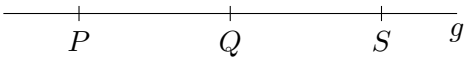
$\overrightarrow{PQ} = \binom{2}{-1}$; $\overrightarrow{RS} = \binom{6}{-3}$. Dann ist $3 \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. Dann folgt

$$\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}} = 3$$

3.1.2 Bemerkung ()

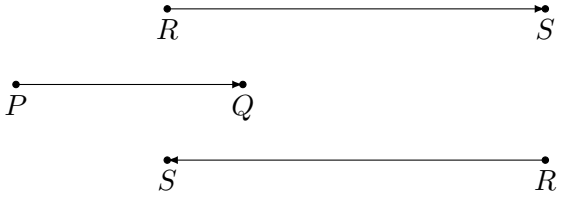
(a) $\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}$ ist nur eine Schreibweise. Der Quotient von Vektoren ist NICHT definiert!
Die Schreibweise $\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}$ impliziert bereits, dass die beiden Vektoren kollinear sind.

(b) Oft betrachtet man Teilverhältnisse für Punkte auf einer Geraden, z. B. $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{PQ}}$ für $P, Q, S \in g$.



(c) Der Absolutbetrag des Teilverhältnisses gibt das Längenverhältnis an:

$$\left|\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}\right| = \frac{\left\|\overrightarrow{RS}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{|\overline{RS}|}{|\overline{PQ}|}$$

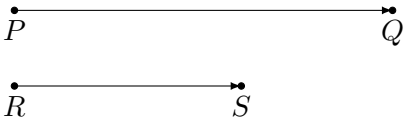


Das Vorzeichen des Teilverhältnisses gibt an, ob die Vektoren gleich- oder entgegengerichtet sind.

(d) Rechenregeln:

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} \cdot \frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{TU}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{TU}} \quad (\text{„Kürzungsregel“})$$

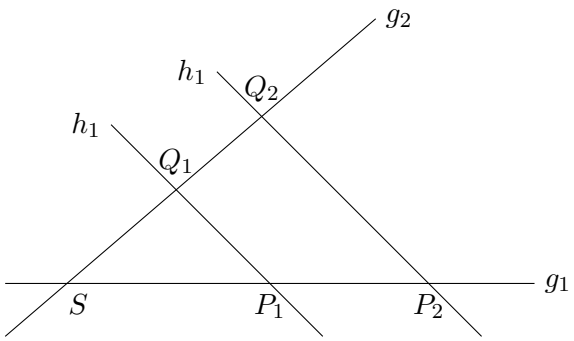
$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} = -\frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{RS}} = -\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{SR}} = \frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{SR}}$$



3.2 Strahlensatz

3.2.1 Satz (Strahlensatz)

Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$, die sich im Punkt S schneiden. Seien h_1, h_2 zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{R}^2$, die NICHT durch S gehen sollen.



Sei $g_1 \cap h_1 = \{P_1\}$, $g_1 \cap h_2 = \{P_2\}$, $g_2 \cap h_1 = \{Q_1\}$, $g_2 \cap h_2 = \{Q_2\}$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

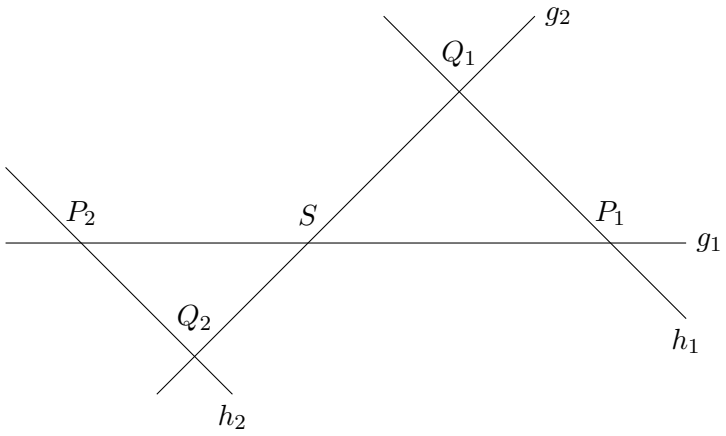
(a) $\frac{\overrightarrow{SP_1}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{\overrightarrow{SQ_1}}{\overrightarrow{SQ_2}}$

(b) $h_1 \parallel h_2$

In diesem Fall gilt:

$$\frac{\overrightarrow{SP_1}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{\overrightarrow{SQ_1}}{\overrightarrow{SQ_2}} = \frac{\overrightarrow{P_1Q_1}}{\overrightarrow{P_2Q_2}}$$

Auch möglich ist der folgende Fall:



Beweis

Da $S, P_1, P_2 \in g_1$, sind die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{SP_1}$ und $\overrightarrow{SP_2}$ kollinear, daher existiert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{SP_2} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SP_1} \tag{III.1}$$

Es folgt:

$$\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}}$$

Da $S, Q_1, Q_2 \in g_2$ folgt: es existiert $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{SQ_2} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{SQ_1} \tag{III.2}$$

Es folgt:

$$\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}}$$

Außerdem lassen sich nach Folgerung 2.1.4 die Geraden h_1 und h_2 schreiben als

$$\begin{aligned} h_1 &= \vec{p_1} + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{P_1Q_1} \\ h_2 &= \vec{p_2} + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2} \end{aligned} \tag{III.3}$$

Zeige nun die Äquivalenz der beiden Aussagen (a) und (b).

(a) ⇒ (b) Nach Voraussetzung (a) ist $\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}}$. Mit obigem folgt damit, dass $\lambda_1 = \lambda_2$.
Rechne:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_2Q_2} &= \overrightarrow{P_2S} + \overrightarrow{SQ_2} = \overrightarrow{SQ_2} - \overrightarrow{SP_2} \\ &\overset{\text{III.2, III.1}}{=} \lambda_2 \cdot \overrightarrow{SQ_1} - \lambda_1 \overrightarrow{SP_1} \overset{\lambda_1=\lambda_2}{=} \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SQ_1} - \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SP_1} \\ &= \lambda_1 \left(\overrightarrow{SQ_1} - \overrightarrow{SP_1} \right) = \lambda_1 \left(\overrightarrow{P_1S} + \overrightarrow{SQ_1} \right) = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{P_1Q_1} \end{aligned}$$

Damit folgt, dass die Richtungsvektoren von h_1 und h_2 kollinear sind (vgl. III.3) und damit sind $h_1 \parallel h_2$. Außerdem folgt, dass $\frac{\overrightarrow{P_2Q_2}}{\overrightarrow{P_1Q_1}} = \lambda_1 = \lambda_2$, also $\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{\overrightarrow{P_2Q_2}}{\overrightarrow{P_1Q_1}}$.

(b) (⇒) (a) Benutze wieder III.3 für die Darstellungen von h_1 und h_2.
Nach Voraussetzung (b) ist $h_1 \parallel h_2$, also sind die Richtungsvektoren kollinear. Es existiert daher ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$\overrightarrow{P_2Q_2} = t \cdot \overrightarrow{P_1Q_1} \tag{III.4}$$

Rechne:

$$\overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{SQ_2} - \overrightarrow{SP_2} \overset{\text{III.1, III.2}}{=} \overrightarrow{SQ_1} - \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SP_1}$$

Andererseits ist

$$\overrightarrow{P_2Q_2} = t \cdot \overrightarrow{P_1Q_1} = t \left(\overrightarrow{SQ_1} - \overrightarrow{SP_1} \right) = t \cdot \overrightarrow{SQ_1} - t \cdot \overrightarrow{SP_1}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$t \cdot \overrightarrow{SQ_1} - t \cdot \overrightarrow{SP_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{SQ_1} - \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SP_1}$$

Umformen liefert:

$$(t - \lambda_2) \cdot \overrightarrow{SQ_1} = (t - \lambda_1) \cdot \overrightarrow{SP_1}$$

Da g_1, g_2 sich in S schneiden, sind $\overrightarrow{SP_1}$ und $\overrightarrow{SQ_1}$ NICHT kollinear. Mit Satz 2.3.3,(b) folgt, dass $t - \lambda_2 = 0$ und $t - \lambda_1 = 0$.

Damit folgt: $t = \lambda_1 = \lambda_2$.

Daher:

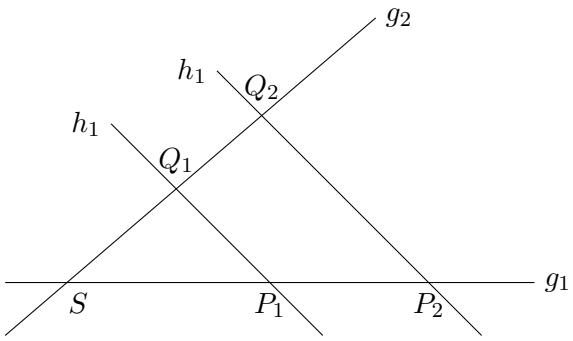
$$\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} = \frac{\overrightarrow{P_2Q_2}}{\overrightarrow{P_1Q_1}}$$

□

3.2.2 Bemerkung ()

Ist $h_1 \parallel h_2$, so gilt nicht nur die Gleichheit der in Satz 3.2.1 betrachteten Teilverhältnisse, sondern es gilt allgemeiner:
Je zwei Abschnitte auf einer Geraden verhalten sich so zueinander, wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

Beispiel



$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{Q_1Q_2}}{\overrightarrow{SQ_1}}$$

Sind NICHT die orientierten Teilverhältnisse bekannt, sondern nur die Streckenverhältnisse, so bleiben die Aussagen von Satz 3.2.1 nur teilweise erhalten.

3.2.3 Satz (Strahlensatz, nicht-orientiert)

Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$.
Seien $h_1, h_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit $h_1 \neq h_2$, $h_1 \parallel h_2$; $S \notin h_1, h_2$.
Sei $g_1 \cap h_1 = \{P_1\}$, $g_1 \cap h_2 = \{P_2\}$, $g_2 \cap h_1 = \{Q_1\}$, $g_2 \cap h_2 = \{Q_2\}$.
Dann gilt:

$$\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} = \frac{|\overline{SQ_2}|}{|\overline{SQ_1}|} = \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$$

Beweis

Hier ist die Aussage (b) des orientierten Strahlensatzes 3.2.1 erfüllt. Damit folgt:

$$\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} = \frac{\overrightarrow{P_2Q_2}}{\overrightarrow{P_1Q_1}}$$

Die Gleichheit bleibt erhalten, wenn man von jedem Ausdruck den Betrag nimmt. Der Betrag des Teilverhältnisses stimmt aber mit dem Verhältnis der Streckenlängen überein.

□

3.2.4 Satz (Umkehrung des Strahlensatzes im nicht-orientierten Fall)

Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit Schnittpunkt S.
Seien $h_1, h_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit $S \notin h_1, h_2$. Seien P_1, P_2, Q_1, Q_2 wie oben.
Es gelte

$$\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} = \frac{|\overline{SQ_2}|}{|\overline{SQ_1}|} = \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$$

Dann gilt entweder

(a) $h_1 \parallel h_2$

ODER

(b) $h_1 \nparallel h_2$, $g_1 \perp g_2$ und S liegt zwischen P_1 und P_2 oder zwischen Q_1 und Q_2.

Beweis

Wie im Beweis von Satz 3.2.1 erhalte

$$\overrightarrow{SP_2} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SP_1} \tag{III.5}$$

und

$$\overrightarrow{SQ_2} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{SQ_1} \tag{III.6}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\underbrace{\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|}}_{=|\lambda_1|} = \underbrace{\frac{|\overline{SQ_2}|}{|\overline{SQ_1}|}}_{=|\lambda_2|}$$

also folgt hier: $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.
Mache nun Fallunterscheidung, ob λ_1 und λ_2 gleiches Vorzeichen haben oder unterschiedliches.

1. Fall $\lambda_1 = \lambda_2$

Mit III.5 und III.6 folgt dann

$$\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}}$$

Damit ist Aussage (a) von Satz 3.2.1 erfüllt. Damit folgt: $h_1 \parallel h_2$

2. Fall $\lambda_1 = -\lambda_2$

Nach Voraussetzung ist

$$|\lambda_2| \overset{\text{III.6}}{=} \frac{|\overline{SQ_2}|}{|\overline{SQ_1}|} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$$

also ist

$$|\lambda_2| \cdot \left\|\overrightarrow{P_1Q_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_2Q_2}\right\|$$

und damit

$$\left\|\lambda_2 \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_2Q_2}\right\| \tag{III.7}$$

Wir rechnen:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{SQ_2} + \overrightarrow{SP_2}\right\| &\overset{\text{III.6, III.5}}{=} \left\|\lambda_2 \cdot \overrightarrow{SQ_1} + \lambda_1 \cdot \overrightarrow{SP_1}\right\| \\ &\overset{\lambda_1=-\lambda_2}{=} \left\|\lambda_2 \cdot \overrightarrow{SQ_1} - \lambda_2 \cdot \overrightarrow{SP_1}\right\| = \left\|\lambda_2 \left(\overrightarrow{SQ_1} - \overrightarrow{SP_1}\right)\right\| \\ &= \left\|\lambda_2 \cdot \overrightarrow{P_1Q_1}\right\| \overset{\text{III.7}}{=} \left\|\overrightarrow{P_2Q_2}\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{SQ_2} - \overrightarrow{SP_2}\right\|\end{aligned}$$

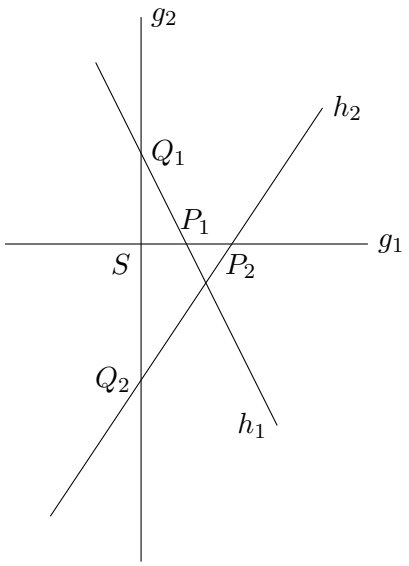
Also ist $\left\|\overrightarrow{SQ_2} + \overrightarrow{SP_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{SQ_2} - \overrightarrow{SP_2}\right\|$. Mit Lemma 1.5.4 folgt

$$\overrightarrow{SP_2} \perp \overrightarrow{SQ_2}$$

Damit folgt, dass $g_1 \perp g_2$.

Jetzt zur Lage von S bzgl. P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2:
Ist $\lambda : 1 < 0$, so folgt wegen $\lambda_1 = -\lambda_2$, dass $\lambda_2 > 0$.
Da $\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} < 0$ folgt, dass $\overrightarrow{SP_2}$ und $\overrightarrow{SP_1}$ entgegengerichtet sind; daher liegt S zwischen P_1 und P_2.
Ist $\lambda_1 > 0$, so folgt wegen $\lambda_1 = -\lambda_2$, dass $\lambda_2 < 0$.
Da $\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} < 0$ folgt, dass $\overrightarrow{SQ_1}$ und $\overrightarrow{SQ_2}$ entgegengerichtet sind; daher liegt S zwischen Q_1 und Q_2.

Skizze zu Fall 2

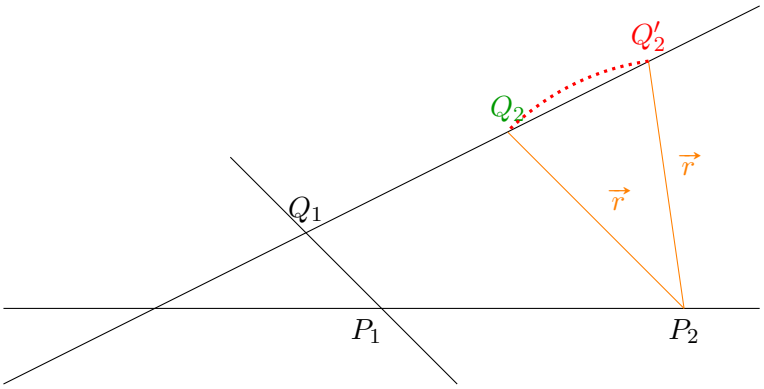


$|\overline{SP_1}| = 1$, $|\overline{SP_2}| = 2$, $|\overline{SQ_1}| = \frac{3}{2}$, $|\overline{SQ_2}| = 3$
$h_1 \nparallel h_2$, $g_1 \perp g_2$

□

3.2.5 Bemerkung ()

- Bei Satz 3.2.4 kann man den Fall 2 ausschließen, indem man zusätzliche Bedingungen formuliert, z. B. dass alle Punkte auf einer Seite bzgl. S liegen sollen, oder dass $g_1 \not\parallel g_2$.
- Aus der Gleichheit $\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} = \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$ folgt NICHT, dass $h_1 \parallel h_2$.



$|\overline{P_2Q_2}| = \frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} \cdot |\overline{P_1Q_1}| =: r$

3.3 Folgerungen aus Strahlensatz

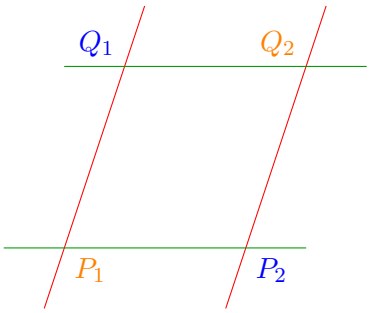
3.3.1 Lemma (Parallelogrammlemma)

Seien P_1, P_2, Q_1, Q_2 vier Punkte im $\mathbb{R}^2$. Dann sind äquivalent:

(a) $P_1 + Q_2 = P_2 + Q_1$

(b) $g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2)$ und $g(P_1, Q_1) \parallel g(P_2, Q_2)$ (d. h. P_1, P_2, Q_1, Q_2 sind Eckpunkte eines Parallelogramms)

Skizze:



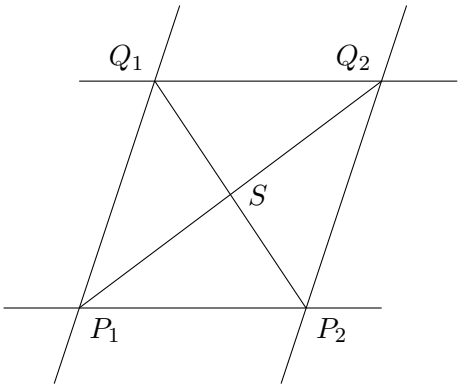
Beweis

(a) ⇒ (b)

Es gelte: $P_1 + Q_2 = P_2 + Q_1$.
Daraus folgt: $P_2 - P_1 = Q_2 - Q_1 \iff \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$
Also folgt: $g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2)$ (da Richtungsvektoren kollinear)

Andererseits folgt auch, dass $Q_1 - P_1 = Q_2 - P_2 \iff \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$
Also folgt: $g(P_1, Q_1) \parallel g(P_2, Q_2)$

(b) ⇒ (a)



Sei S der Schnittpunkt von $g(P_1, Q_2)$ und $g(P_2, Q_1)$. Setze

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SQ_1}}$$

Da $g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2)$ folgt mit dem orientierten Strahlensatz

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{Q_2Q_1}} = \frac{\overrightarrow{SP_1}}{\overrightarrow{SQ_2}} = \frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} = \lambda \qquad (*)$$

Da $g(P_1, Q_1) \parallel g(P_2, Q_2)$ folgt mit dem orientierten Strahlensatz

$$\frac{\overrightarrow{SP_1}}{\overrightarrow{SQ_2}} = \frac{\overrightarrow{SQ_1}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \iff \lambda^2 = 1$$

Wir erhalten daraus zwei Lösungen: $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$.
Für $\lambda = 1$ folgt

$$\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} = 1$$

d. h. $\overrightarrow{SQ_1} = \overrightarrow{SP_2}$, also wäre $Q_1 = P_2$ ↯, da $Q_1 \neq P_2$
Also folgt: $\lambda = -1$.
Mit $(*)$ folgt:

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{Q_2Q_1}} = -1$$

also $\underbrace{\overrightarrow{P_1P_2}}_{P_2-P_1} = \underbrace{-\overrightarrow{Q_2Q_1}}_{-Q_2+Q_1}$. Daraus folgt:

$$P_1 + Q_2 = P_2 + Q_1$$

□

3.3.2 Satz (Satz von Pappos)

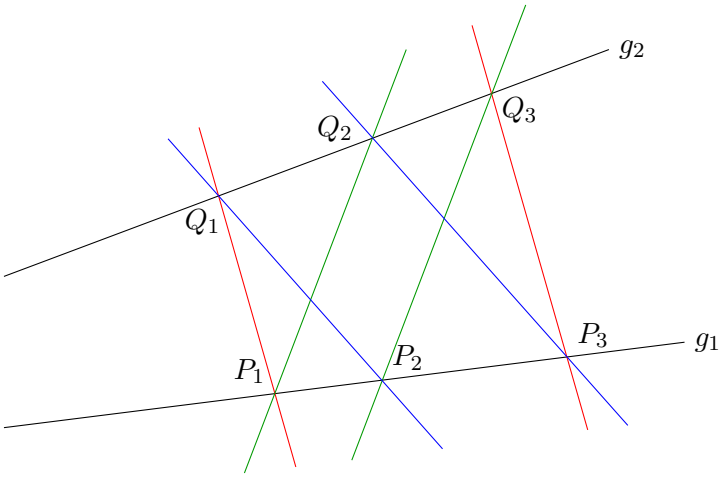
Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$. Seien P_1, P_2, P_3 drei verschiedene Punkte auf g_1 und Q_1, Q_2, Q_3 drei verschiedene Punkte auf g_2 mit

$$g(P_1, Q_2) \parallel g(P_2, Q_3) \quad \wedge \quad g(P_2, Q_1) \parallel g(P_3, Q_2)$$

Dann gilt:

$$g(P_1, Q_1) \parallel g(P_3, Q_3)$$

Skizze:



Beweis

1. Fall

g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt S.

Orientierter Strahlensatz (Satz 3.2.1) angewandt auf $g(P_1, Q_2) \parallel g(P_2, Q_3)$ liefert:

$$\frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{SQ_3}}{\overrightarrow{SQ_2}} \tag{III.8}$$

Orientierter Strahlensatz angewandt auf $g(P_2, Q_1) \parallel g(P_3, Q_2)$ liefert:

$$\frac{\overrightarrow{SP_3}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} \tag{III.9}$$

Wir folgern

$$\frac{\overrightarrow{SP_3}}{\overrightarrow{SP_1}} \overset{(*)}{=} \frac{\overrightarrow{SP_3}}{\overrightarrow{SP_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{SP_2}}{\overrightarrow{SP_1}} \overset{\text{III.8,III.9}}{=} \frac{\overrightarrow{SQ_2}}{\overrightarrow{SQ_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{SQ_3}}{\overrightarrow{SQ_2}} \overset{(*)}{=} \frac{\overrightarrow{SQ_3}}{\overrightarrow{SQ_1}}$$

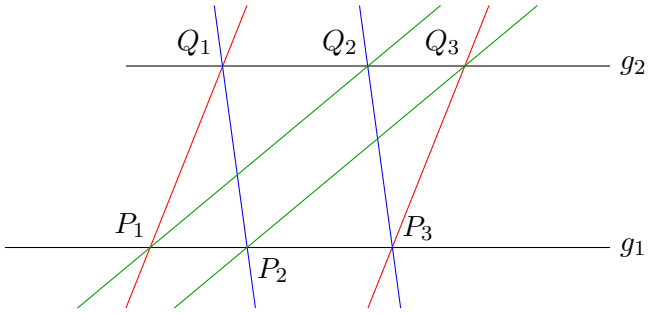
$(*)$ Kürzungsregel für Teilverhältnisse

Mit orientiertem Strahlensatz folgt aus $\frac{\overrightarrow{SP_3}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{SQ_3}}{\overrightarrow{SQ_1}}$, dass $g(P_1, Q_1) \parallel g(P_3, Q_3)$

2. Fall

g_1 und g_2 schneiden sich NICHT, d. h. $g_1 \parallel g_2$.

Skizze:



Aus $g_1 \parallel g_2$ und $g(P_1, Q_2) \parallel g(P_2, Q_3)$ folgt mit Lemma 3.3.1:

$$P_1 + Q_3 = P_2 + Q_2$$

Aus $g_1 \parallel g_2$ und $g(P_2, Q_1) \parallel g(P_3, Q_2)$ folgt mit Lemma 3.3.1:

$$P_2 + Q_2 = P_3 + Q_1$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$P_1 + Q_3 = P_3 + Q_1$$

Mit Lemma 3.3.1 folgt:

$$g(P_1, Q_1) \parallel g(P_3, Q_3)$$

□

3.3.3 Satz (Satz von Desargues)

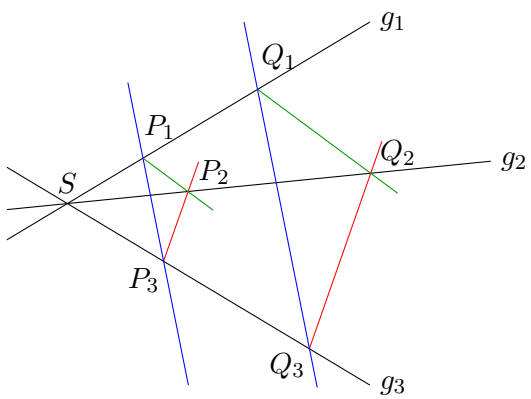
Seien g_1, g_2, g_3 drei Geraden im $\mathbb{R}^2$, die sich in einem Punkt S schneiden.
Seien $P_1, Q_1 \in g_1$, $P_2, Q_2 \in g_2$, $P_3, Q_3 \in g_3$ mit

$$g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2) \quad \wedge \quad g(P_1, P_3) \parallel g(Q_1, Q_3)$$

Dann gilt

$$g(P_2, P_3) \parallel g(Q_2, Q_3)$$

Skizze:



Beweis

Übungsaufgabe.

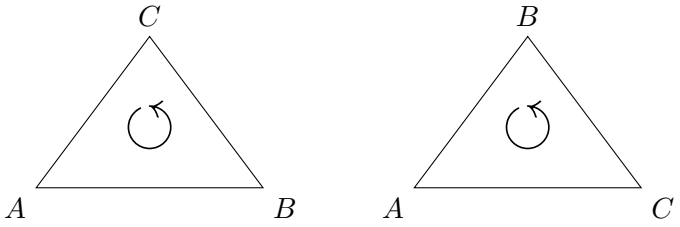
□

IV Dreiecke

4.1 Erste Dreiecksbetrachtungungen

4.1.1 Definition ()

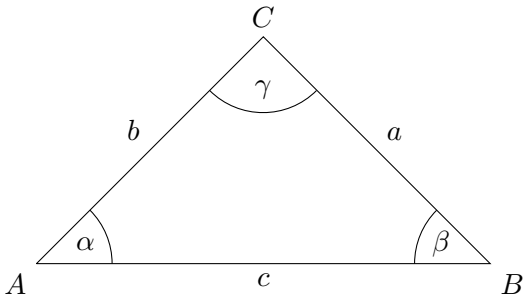
Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte im $\mathbb{R}^2$. Das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und Orientierung gegen den Uhrzeigersinn bezeichnen wir mit $\triangle(A, B, C)$.



$\triangle(A, B, C)$ $\triangle(A, C, B)$

Bezeichnungen im $\triangle(A, B, C)$:

- $a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
- $\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$



Da $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck, folgt: $0° \lneqq \alpha, \beta, \gamma \lneqq 180°$

4.1.2 Satz ()

Die Seitenlängen eines Dreiecks erfüllen

$$a < b + c \ , \ b < a + c \ , \ c < a + b$$

Beweis

$a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\| \overset{(*)}{\leq} \left\|\overrightarrow{BA}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = c + b$
$(*)$ Dreiecksungleichung Satz 1.4.4

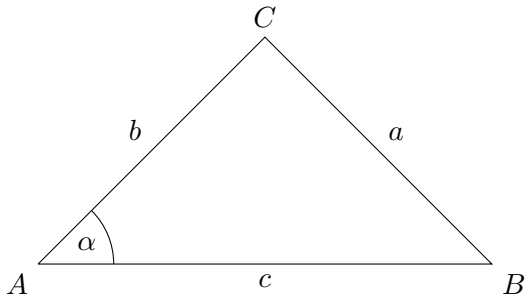
Da die Punkte A, B, C NICHT kollinear sind, ist nach Satz 1.4.4 die Ungleichung strikt, d. h. $a \lneqq b + c$.

□

4.1.3 Satz (Cosinussatz für Dreiecke)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$



Beweis

$$\begin{aligned} a^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 \\ &\overset{(*)}{=} \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2 \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \cos\left(\angle\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \end{aligned}$$

$(*)$ Cosinussatz 1.5.3

Rest analog.

□

Löst man obige Formeln nach $\cos(\alpha)/\cos(\beta)/\cos(\gamma)$ auf, so erhält man:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4.1.4 Satz (Sinussatz)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Beweis

$$\begin{aligned}\big(\sin(\alpha)\big)^2 &= 1 - \big(\cos(\alpha)\big)^2 \overset{s.o.}{=} 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2} \\ &= 1 - \frac{b^4+2b^2c^2-2a^2b^2+c^4-2a^2c^2+a^4}{4b^2c^2} \\ &= \frac{4b^2c^2-b^4-2b^2c^2+2a^2b^2-c^4+2a^2c^2-a^4}{4b^2c^2} \\ &= \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2}\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}\big(\sin(\beta)\big)^2 &= 1 - \big(\cos(\beta)\big)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) \\ &= \ldots = \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2c^2}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{\big(\sin(\alpha)\big)^2}{\big(\sin(\beta)\big)^2} = \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4b^2c^2} \cdot \frac{4a^2c^2}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4} = \frac{a^2}{b^2}$$

Daher ist

$$\frac{\big(\sin(\alpha)\big)^2}{a^2} = \frac{\big(\sin(\beta)\big)^2}{b^2}$$

Da die Sinusfunktion für Winkel zwischen $0°$ und $180°$ immer nicht-negativ ist, dürfen wir die Wurzel ziehen ohne Beträge und es folgt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

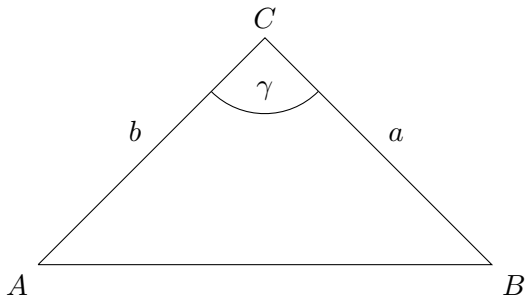
Rest analog.

□

4.1.5 Definition ()

Der Flächeninhalt Δ eines Dreiecks $\triangle(A,B,C)$ ist definiert als

$$\Delta := \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$



Nach Sinussatz ist

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

also ist

$$b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta) \tag{IV.1}$$

und

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

also ist

$$a \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\alpha) \tag{IV.2}$$

Es folgt:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) \overset{\text{IV.1}}{=} \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) \overset{\text{IV.2}}{=} \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$

Damit st der Flächeninhalt wohldefiniert (d. h. hängt NICHT von den Bezeichnungen im Dreieck ab).

4.1.6 Satz (Formel von Heron)

Sei $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der halbe Umfang des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$. Dann gilt:

$$\Delta = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$$

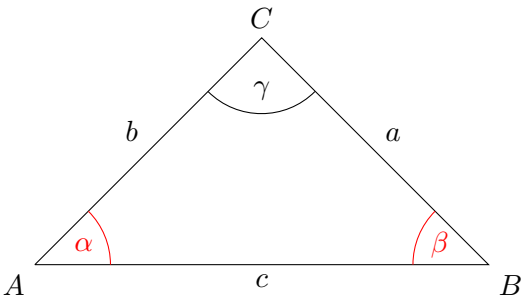
Beweis

Übungsaufgabe.

□

4.1.7 Definition ()

(a) Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten die gleiche Länge haben. Diese Seiten nennt man **Schenkel** des Dreiecks, die andere Seite **Basis**.



(b) Ein Dreieck heißt **gleichseitig**, wenn alle drei Seiten die gleiche Länge haben.

4.1.8 Satz ()

(a) Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei seiner Innenwinkel übereinstimmen.

(b) Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Innenwinkel übereinstimmen.

Beweis

(a), (⇒)

Sei $\triangle(A,B,C)$ gleichschenklig. Sei ohne EInschränlung $a = b$. Dann folgt mit Cosinussatz

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \overset{a=b}{=} \frac{c^2}{2ac} \overset{a=b}{=} \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \cos(\beta)$$

Es folgt: $\alpha = \beta$

(a),(⇐)

Seien im $\triangle(A,B,C)$ zwei Innenwinkel gleich groß. Sei ohne Einschränkung $\alpha = \beta$. Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

Aus $\alpha = \beta$ und $\sin(\alpha) \neq 0$ folgt hieraus $a = b$, also ist $\triangle(A,B,C)$ gleichschenklig.

(b)

Wende (a) mehrfach an.

□

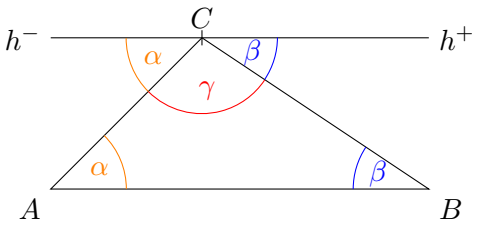
4.2 Winkelsumme und Außenwinkel

4.2.1 Satz ()

Im Dreieck $\triangle(A,B,C)$ gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

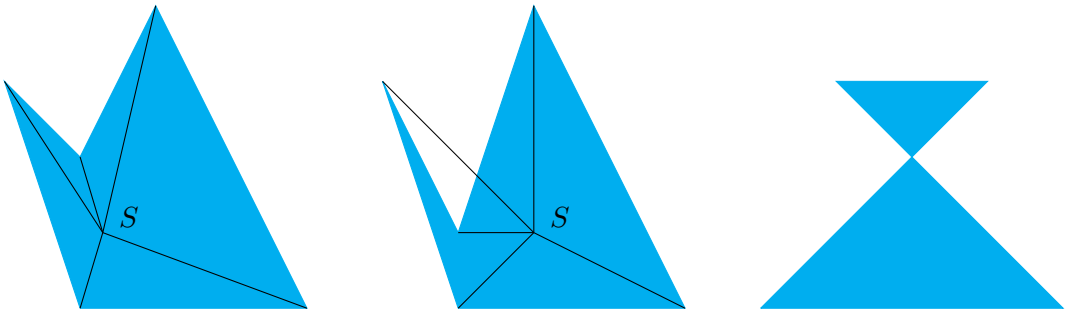
Beweis



Zeichne Parallele zu $g(A,B)$ durch C.
Setze $h^+ = \vec{c} + \mathbb{R}^+ \cdot \overrightarrow{AB}$ und $h^- = \vec{c} + \mathbb{R}^- \cdot \overrightarrow{AB}$
Nach Satz 2.4.6 über Wechselwinkel ist $\angle(CB^+, h^+) = \beta$ und $\angle(CA^+, h^-) = \alpha$
Die Winkel $\angle(h^-, CB^+) = \alpha + \gamma$ und $\angle(CB^+, h^+) = \beta$ bilden Nebenwinkel; mit Satz 2.4.4 folgt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

□

Ein Polygon, in dessen Inneren es einen Punkt S gibt, sodass die Verbindungsstrecke von S zu jedem Eckpunkt ganz im Inneren des Polygons liegt, nennen wir **konvex**.



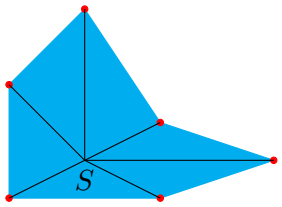
konvex NICHT konvex NICHT konvex

4.2.2 Satz (Winkelsumme Polygon)

Die Summe der Innenwinkel eines konvexen Polygons im $\mathbb{R}^2$ mit n Ecken (für $n \geq 3$) beträgt

$$(n-2) \cdot 180°$$

Beweis



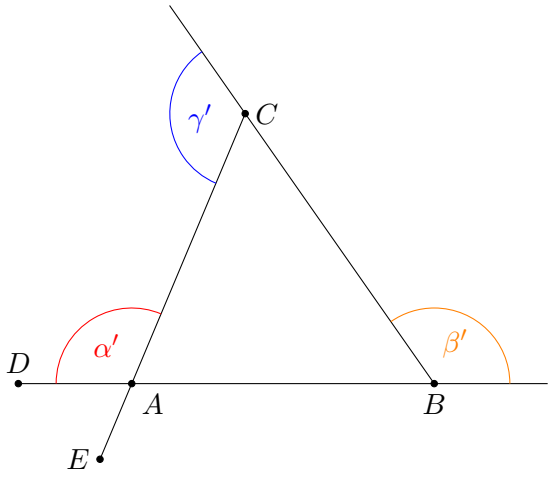
Sei S ein Punkt im Inneren des Polygons, sodass die Verbindungsstrecke zu jedem Eckpunkt ganz im Inneren des Polygons liegt.
Diese Verbindungsstrecken zerlegen das Polygon in n Teildreiecke.
Die Winkelsumme dieser n Teildreiecke beträgt $n \cdot 180°$.
Die Winkelsumme des Polygons ergibt sich dann durch Subtraktion also Winkelsumme Polygon gleich

$$n \cdot 180° - 360° = n \cdot 180° - 2 \cdot 180° = (n-2) \cdot 180°$$

□

4.2.3 Definition ()

Sei $\triangle(A,B,C)$ ein Dreieck. Sei $D \in g(A,B)$, sodass $A \in \overline{DB}$.



Der Außenwinkel α' an A ist definiert als

$$\alpha' = \angle(C, A, D)$$

Analog definiere β' und γ'.
Bemerkung: Wählt man $E \in g(A, C)$ mit $A \in \overline{EC}$, so wird über $\alpha'' = \angle(E, A, B)$ auch ein Außenwinkel definiert; nach Satz 2.4.4 gilt aber: $\alpha' = \alpha''$.
Da α und α' Nebenwinkel sind, gilt nach Satz 2.4.4: $\alpha + \alpha' = 180°$
Mit Satz 4.2.1 gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $\alpha' = \beta + \gamma$
Wir haben also gezeigt:

4.2.4 Satz (starker Außenwinkelsatz)

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks stimmt mit der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel überein.

4.2.5 Korollar (schwacher Außenwinkelsatz)

Jeder Innenwinkel eines Dreiecks ist echt kleiner als jeder nichtanliegende Außenwinkel.

Beweis

Wir zeigen, dass für α gilt: $a < \beta'$ und $\alpha < \gamma'$.
Nach Satz 4.2.4 ist $\beta' = \alpha + \gamma > \alpha$.
Analog: $\gamma' = \alpha + \beta \overset{\beta > 0°}{>} \alpha$

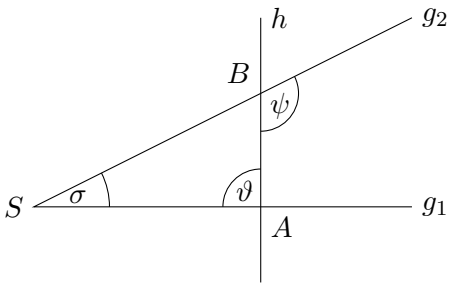
□

4.2.6 Satz (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)

Es seien g_1, g_2 zwei verschiedene Geraden, die von einer dritten Geraden h geschnitten werden. Seien ϑ, ψ Wechselwinkel an den Geraden g_1, g_2. Ist $\vartheta = \psi$, so sind g_1 und g_2 parallel.

Beweis

Wir bezeichnen die Schnittpunkte von g_1, g_2 mit h als A und B.



Annahme: $g_1 \nparallel g_2$
Dann schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt S.
Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass S in der gleichen Halbebene wie die Schenkel von ϑ liegt.
S bildet mit A und B ein Dreieck; ϑ ist Innenwinkel dieses Dreiecks und ψ ist ein Außenwinkel des Dreiecks. Ist σ der Innenwinkel bei S, dann folgt mit Satz 4.2.4

$$\psi = \sigma + \vartheta$$

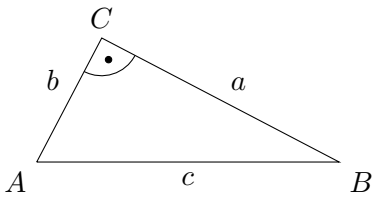
Da nach Voraussetzung $\psi = \vartheta$, folgt daraus: $\sigma = 0° \quad \lightning\ \sigma$ Dreieckswinkel, also $\sigma > 0°$.
Daher war die Annahme falsch. Es folgt: $g_1 \parallel g_2$

□

Bemerkung: Gilt für Stufenwinkel ϑ, φ an beliebigen Geraden g_1, g_2, h, dass $\vartheta = \varphi$, so folgt ebenfalls, dass $g_1 \parallel g_2$.

4.3 Rechtwinklige Dreiecke

4.3.1 Definition ()



Ein Dreieck heißt **rechtwinklig**, wenn einer der Innenwinkel ein rechter Winkel ist. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten heißen **Katheten**.

4.3.2 Satz (Satz des Pythagoras)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann ist das Dreieck rechtwinklig mit $\gamma = 90°$ genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweis

Nach Cosinussatz ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ $(*)$. Damit folgt

$$\gamma = 90° \iff \cos(\gamma) = 0 \overset{(*)}{\iff} a^2 + b^2 = c^2$$

□

Ist $\triangle(A, B, C)$ rechtwinklig mit $\gamma = 90°$, so folgt mit Satz 4.2.1:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Daher gilt auch

$$0° \lneq \alpha, \beta \lneq 90°$$

4.3.3 Proposition ()

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$. Dann gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$
$$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$
$$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Merkregel: $\cos = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\sin = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Beweis

Nach Satz des Pythagoras (4.3.2) gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (*)$$

Nach Cosinussatz gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + \overbrace{c^2 - a^2} = b^2 \text{ wegen } (*)}{2bc} = \frac{b^2 + b^2}{2bc} = \frac{\cancel{2}b\cancel{^2}}{\cancel{2}\cancel{b}c}\frac{b}{c}$$

Da $\gamma = 90°$, ist $\sin(\gamma) = 1$. Mit Sinussatz folgt

$$\sin(\alpha) = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \overset{\sin(\gamma)=1}{=} \frac{a}{c}$$

Da $\alpha \lneq 90°$, ist $\tan(\alpha)$ definiert

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

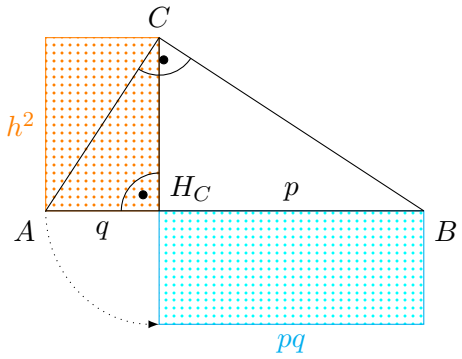
Für β analoge Rechnung oder benutze, dass $\sin(\beta) = \sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$

□

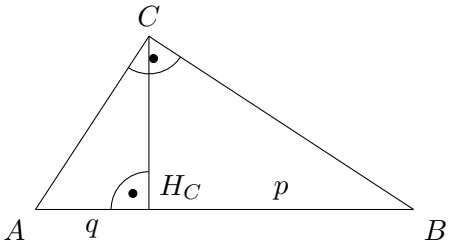
4.3.4 Satz (Höhensatz)

Sei $\triangle(A, B, C)$ rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.
Sei H_C der Höhenfußpunkt der Höhe durch C. Sei $h = |\overline{CH_C}|$; $p = |\overline{AH_C}|$; $q = |\overline{H_CB}|$. Dann gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$



Beweis



Satz des Pythagoras angewandt auf $\triangle(A, H_C, C)$:

$$b^2 = p^2 + h^2 \qquad (1)$$

Satz des Pythagoras angewandt auf $\triangle(H_C, B, C)$:

$$a^2 = q^2 + h^2 \qquad (2)$$

Satz des Pythagoras angewandt auf $\triangle(A, B, C)$:

$$c^2 = a^2 + b^2 \overset{(1),(2)}{=} q^2 + h^2 + p^2 + h^2 = p^2 + q^2 + 2h^2$$

Andererseits ist $c = p + q$; damit folgt:

$$c^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$h^2 = p \cdot q$$

□

4.3.5 Satz (Kathetensatz)

Voraussetzungen siehe Satz 4.3.4. Dann gilt:

$$a^2 = c \cdot q \quad , \quad b^2 = c \cdot p$$

Beweis

nach Höhensatz 4.3.4 ist $h^2 = p \cdot q$.
Satz des Pythagoras auf $\triangle(H_C, B, C)$:

$$a^2 = q^2 + h^2 \overset{h^2=pq}{=} q^2 + pq = q\overbrace{(p+q)} = c = q \cdot c$$

Satz des Pythagoras auf $\triangle(A, H_C, C)$:

$$b^2 = p^2 + h^2 \overset{h^2=pq}{=} p^2 + pq = p(p+q) = p \cdot c$$

□

Bemerkung: Es gelten jeweils auch die Umkehrungen, siehe Übungen.

4.4 Kongruente und ähnliche Dreiecke

4.4.1 Satz (Kongruenzsatz)

Seien $\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(A', B', C')$ zwei Dreiecke. Dann sind äquivalent:

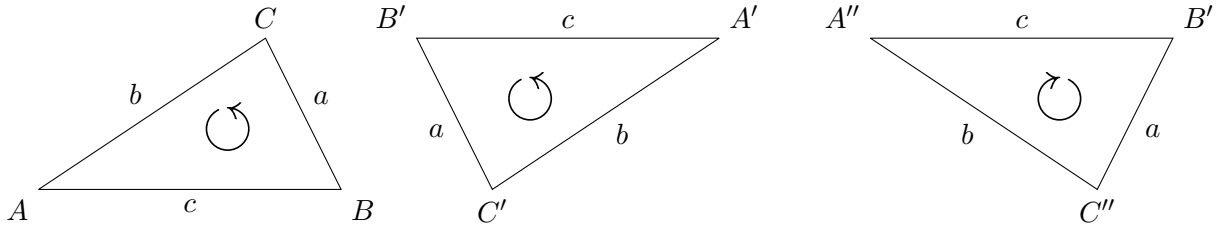
(a) Die beiden Dreiecke stimmen in allen drei Seiten überein (SSS).

(b) Die Dreiecke stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein (SWS).

(c) Die Dreiecke stimmen in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel überein (SsW).

(d) Die Dreiecke stimmen in einer Seitenlänge und zwei entsprechenden Winkeln überein (WSW).

Wir nennen diese Dreiecke **kongruent**.
Bemerkung: Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn es eine längen- und winkelerhaltende Abbildung (Isometrie) gibt, die ein Dreieck auf das andere überführt. Diese Abbildungen lassen sich als Verknüpfungen von Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen schreiben. Wir nennen kongruente Dreiecke auch **deckungsgleich**.



$\triangle(A,B,C)$ $\triangle(A',B',C')$ $\triangle(A'',C'',B'')$

$\triangle(A,B,C)$ und $\triangle(A',B',C')$ sind gleichsinnig kongruent.
$\triangle(A',B',C')$ und $\triangle(A'',B'',C'')$ sind gegensinnig kongruent.

Wir wollen meist, dass die Orientierung erhalten bleibt, daher bedeutet kongreunt bei uns (fast immer) „gleichsinnig kongruent“.

Beweis

Bezeichne die Größen im $\triangle(A',B',C')$ mit a',b',c' bzw. α',β',γ'.

SSS ⇒ SWS, SsW, WSW

Sei $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$. Nach Cosinussatz ist

$$\cos(\alpha)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b'^2+c'^2-a'^2}{2b'c'}=\cos(\alpha')$$

Daraus folgt: $\alpha=\alpha'$.

Analog folgt: $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$.

SWS ⇒ SSS

Sei $\alpha=\alpha'$, $b=b'$, $c=c'$. Mit Cosinussatz:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha)=b'^2+c'^2-2b'c'\cos(\alpha')=a'^2$$

Es folgt: $a=a'$.

SsW ⇒ SSS

Sei $b=b'$, $c=c'$, $b>c$, $\beta=\beta'$.

Die Seitenlänge a lässt sich mit dem Cosinussatz berechnen aus

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta)$$

Forme um:

$$a^2-2ac\cos(\beta)+c^2-b^2=0$$

Mitternachtsformel:

$$a_{1/2}=\frac{1}{2}\left(2c\cos(\beta)\pm\sqrt{4c^2\cos^2(\beta)-4c^2+4b^2}\right)=c\cos(\beta)\pm\sqrt{\underbrace{b^2-c^2}_{\substack{>0,\text{ da}\\ b>c\Rightarrow b^2>c^2}}+c^2\cos^2(\beta)}$$

Da $\underbrace{b^2 - c^2}_{>0} + c^2\cos^2(\beta) > c^2\cos^2(\beta)$ folgt

$$\sqrt{b^2 - c^2 + c^2\cos^2(\beta)} > c\cos(\beta)$$

Damit folgt:

$$c\cos(\beta) - \sqrt{b^2 - c^2 + c^2\cos^2(\beta)} < 0$$

Da $a > 0$ sein muss, folgt, dass a eindeutig bestimmt ist als

$$a = c\cos(\beta) + \sqrt{b^2 - c^2 + c^2\cos^2(\beta)} \overset{\text{Vor.}}{=} c'\cos(\beta') + \sqrt{b'^2 - c'^2 + c'^2\cos^2(\beta')} = a'$$

WSW $\Rightarrow$ SSS

Wenn zwei Winkel übereinstimmen, so stimmen wegen der Winkelsumme alle drei Winkel überein. Sei also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Sei $b = b'$.
Mit Sinussatz:

$$a = \frac{b\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{b'\sin(\alpha')}{\sin(\beta')} = a' \quad ; \quad c = \frac{b\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{b'\sin(\gamma')}{\sin(\beta')} = c'$$

□

4.4.2 Satz (Ähnlichkeit)

Seien $\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(A', B', C')$ zwei Dreiecke. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

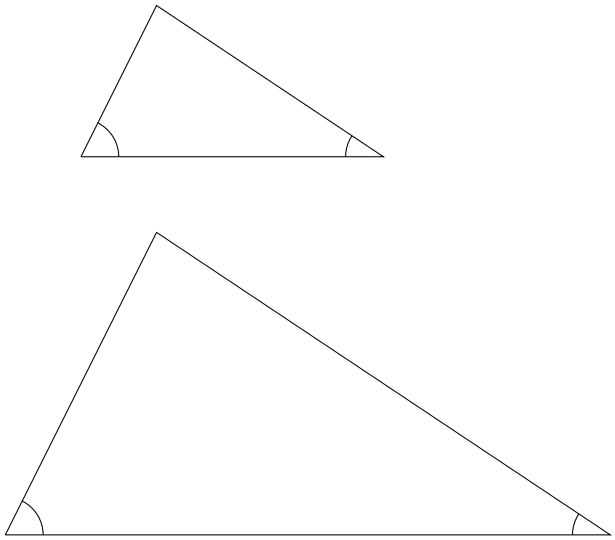
(a) Die Dreiecke stimmen in den Verhältnissen der Seitenlängen überein.

(b) Die Dreiecke stimmen in den Verhältnissen zweier Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel überein.

(c) Die Dreiecke stimmen in den Verhältnissen zweier Seitenlängen der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel überein.

(d) Die Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein.

Wir nennen diese Dreiecke dann **ähnlich**.
Bemerkung: Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn es eine Abbildung (sogenannte Ähnlichkeitsabbildung) gibt, die Winkelgrößen und Streckenverhältnisse unverändert lässt (Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen sowie Streckungen/Stauchungen).



Beweis

(a) ⇒ (b), (c), (d)

Sei $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$; $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$.

Mit Cosinussatz

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2}{2bc} + \frac{c^2}{2bc} - \frac{a^2}{2bc} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}\right) \overset{\text{Vor.}}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b'}{c'} + \frac{c'}{b'} - \frac{a'}{c'} \cdot \frac{a'}{c'}\right) = \cos(\alpha')$$

$\Longrightarrow$ $\alpha = \alpha'$. Analog $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

(b) ⇒ (a)

Sei $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ und $\alpha = \alpha'$.

Mit Cosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad \Big| : c^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1 - 2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \cos(\alpha)$$
$$= \left(\frac{b'}{c'}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \frac{b'}{c'} \cdot \cos(\alpha') = \left(\frac{a'}{c'}\right)^2$$

Es folgt: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$. Analog: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

(c) ⇒ (a)

Sei $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$, sei $b > c$ und sei $\beta = \beta'$.

Dann ist nach Beweis von Satz 4.4.1 SsW $\Longrightarrow$ SSS die Seite a eindeutig gegeben als

$$a = c \cdot \cos(\beta) + \sqrt{b^2 - c^2 \cdot \sin^2(\beta)}$$

Dividiere diese Gleichung durch c:

$$\frac{a}{c} = \cos(\beta) + \sqrt{\frac{b^2}{c^2} - \sin^2(\beta)} \overset{\text{Vor.}}{=} \cos(\beta') + \sqrt{\left(\frac{b'}{c'}\right)^2 - \sin^2(\beta')} = \frac{a'}{c'}$$

Analog zeige $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

(d) $\Rightarrow$ (a)

Wenn zwei Winkel übereinstimmen, so stimmen auf Grund der Winkelsumme sogar alle drei Winkel überein. Sei also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

Der Sinussatz liefert:

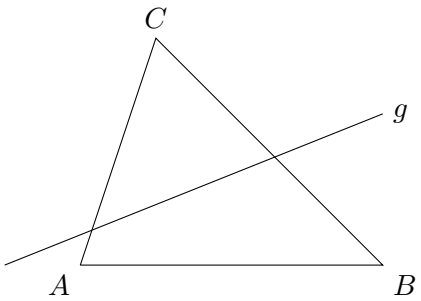
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\beta')} = \frac{a'}{b'}$$

Analog: $\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \overset{\text{Vor.}}{=} \frac{\sin(\alpha')}{\sin(\gamma')} = \frac{a'}{c'}$.

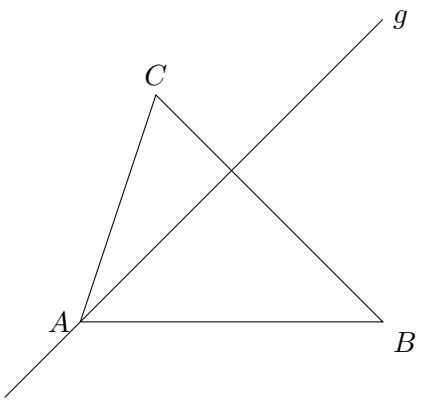
□

4.5 Satz von Ceva, Satz von Menelaos

Wir nennen eine Gerade, die quer durch ein Dreieck geht, **Transversale**.



Geht diese Gerade durch einen Eckpunkt, so nennen wir sie **Ecktransversale**.



Der Satz von Ceva liefert uns ein Kriterium, wann sich Ecktransversalen in einem Punkt schneiden. Dies werden wir später benutzen, um zu zeigen, dass sich die Seitenverhältnisse, Winkelhalbierenden etc. in einem Punkt schneiden.

4.5.1 Satz (Satz von Ceva)

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle(A, B, C)$ und Punkte $C_1 \in g(A, B)$, $B_1 \in g(A, C)$ und $A_1 \in g(B, C)$. Die Punkte A_1, B_1, C_1 seien KEINE Eckpunkte von $\triangle(A, B, C)$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $g(A, A_1)$, $g(B, B_1)$ und $g(C, C_1)$ schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel.

(b) $\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$

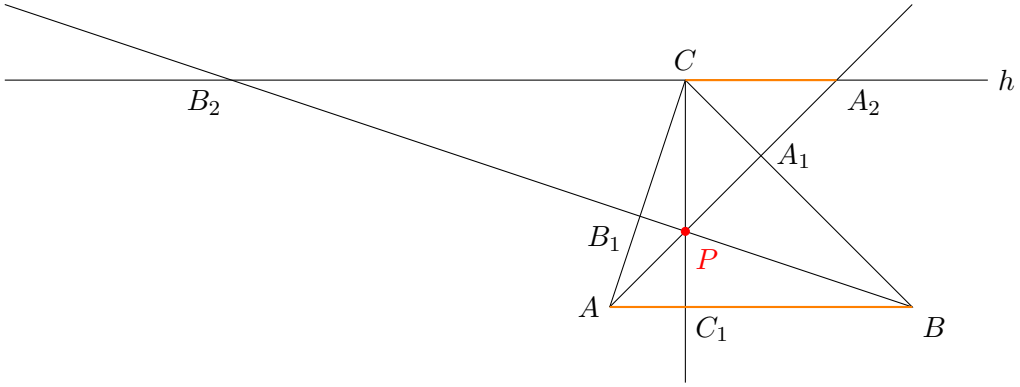
Beweis

(a) ⇒ (b)

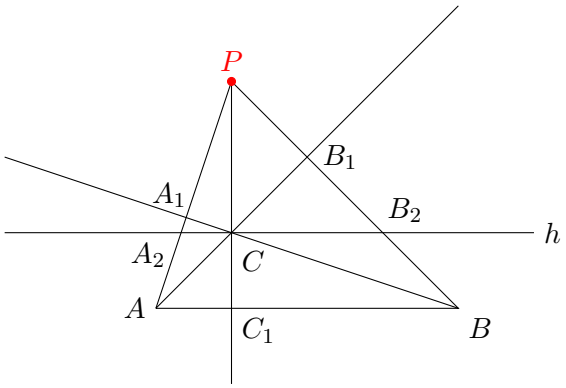
Es gelte, dass die drei Ecktransversalen sich in einem Punkt schneiden oder parallel sind.

1. Fall: Die drei Geraden schneiden sich in einem Punkt P.

Skizze:



ODER:



Ziehe Parallele h zu $g(A, B)$ durch C und erhalte Schnittpunkte A_2 von h mit $g(A, A_1)$ und B_2 von h mit $g(B, B_1)$.

Orientierter Strahlensatz zum Zentrum A_1 mit $g(A, B) \parallel g(A_2, C)$ liefert:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{A_2C}}{\overrightarrow{AB}} \tag{IV.3}$$

Orientierter Strahlensatz zum Zentrum B_1 mit $g(A, B) \parallel g(B_2, C)$ liefert:

$$\frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1c}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB_2}} \tag{IV.4}$$

Mit orieniertem Strahlensatz zum Zentrum P und $g(A, B) \parallel g(A_2, B_2)$ folgt:

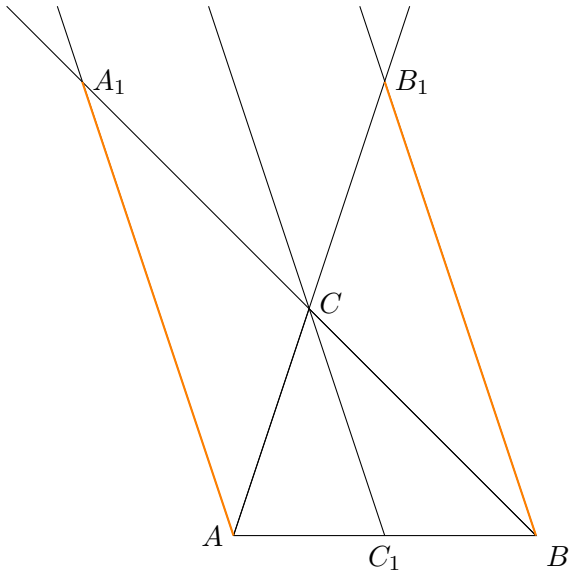
$$\frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} \overset{\text{Kürzungsregel}}{=} \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{CB_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_2}}{\overrightarrow{C_1A}} \overset{\text{or. Str.}}{=} \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PC_1}} = \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{CA_2}} \tag{IV.5}$$

Es folgt:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} \overset{\text{IV.3,IV.4,IV.5}}{=} \frac{\overrightarrow{A_2C}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{CA_2}} = -1$$

2. Fall: Die drei Ecktransversalen sind parallel.

Skizze:



Orientierter Strahlensatz zum Zentrum C:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB_1}} \tag{IV.6}$$

Orientierter Strahlensatz zum Zentrum A:

$$\frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{CA}} \tag{IV.7}$$

Es folgt:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} \overset{\text{IV.6,IV.7}}{=} \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{CA}} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

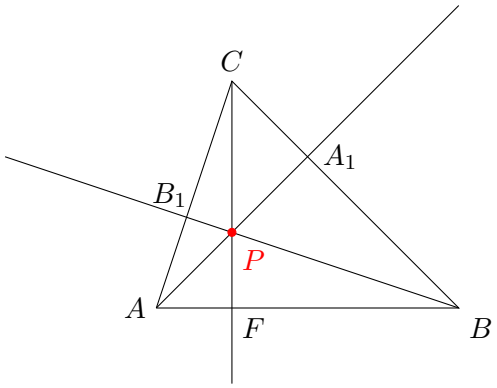
Es gelte:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1 \qquad (*)$$

1. Fall: $g(A, A_1) \nparallel g(B, B_1)$

Dann schneiden sich $g(A, A_1)$ und $g(B, B_1)$ in einem Punkt, nenne diesen P.

Skizze:



Sei F der Schnittpunkt von $g(C,P)$ mit $g(A,B)$. Zeige: $F = C_1$
Dann folgt aus Satz von Ceva, Hinrichtung (wurde eben gezeigt), angewandt auf $\triangle(A,B,C)$ und die Punkte A_1, B_1, F:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{FA}} = -1 \qquad (**)$$

Vergleiche $(**)$ mit $(*)$ und erhalte

$$\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{FA}} = \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} =: \mu$$

Es gilt also

$$\mu \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB} \quad \text{und} \quad \mu \cdot \overrightarrow{C_1A} = \overrightarrow{C_1B}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\mu \cdot \overrightarrow{FC_1} = \overrightarrow{FC_1}$$

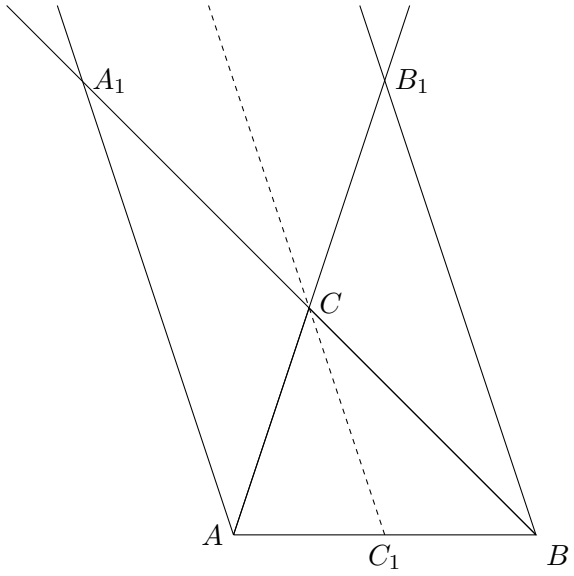
Daher ist

$$(\mu - 1) \cdot \overrightarrow{FC_1} = \vec{0}$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $(\mu - 1) = 0$ oder wenn $\overrightarrow{FC_1} = \vec{0}$. Wäre $\mu - 1 = 0$, dann wäre $\mu = 1$. Dann würde mit Obigem folgen: $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB}$, also $A = B$ ↯.
Dies ist Widerspruch dazu, dass A, B, C ein Dreieck bilden. Daher kann $\mu - 1$ NICHT 0 sein und es folgt $\overrightarrow{FC_1} = \vec{0}$ und dass $F = C_1$.
Ingesamt folgt: P ist der gemeinsame Schnittpunkt der drei Ecktransversalen.

2. Fall: $g(A, A_1) \parallel g(B, B_1)$

Skizze:



Orientierter Strahlensatz zum Zentrum C liefert:

$$\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB_1}}$$

Setze dies in $(*)$ ein:

$$-1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = (-1) \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} \implies \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1$$

Es folgt:

$$\frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{AC_1}} =: \lambda$$

Damit ist

$$\overrightarrow{B_1C} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BC_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC_1} \quad (**)$$

Es folgt:

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{B_1C} \overset{(**)}{=} \overrightarrow{AC} - \lambda \cdot \overrightarrow{AC} = (1-\lambda) \cdot \overrightarrow{AC}$$

Analog folgt:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \lambda \cdot \overrightarrow{AC_1} = (1-\lambda) \cdot \overrightarrow{AC_1}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{AC}} = 1 - \lambda = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC_1}}$$

Mit orientiertem Strahlensatz zum Zentrum A (Umkerhung) folgt: $g(B, B_1) \parallel g(C, C_1)$

□

4.5.2 Bemerkung (Satz von Ceva)

Liegen A_1, B_1, C_1 innerhalb der Dreiecksseiten, so kann die Parallelität ausgeschlossen werden. In diesem Fall gilt also:

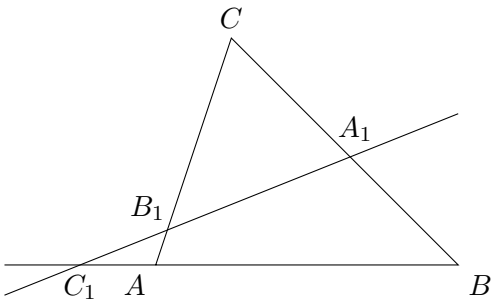
$$g(A, A_1), g(B, B_1), g(C, C_1) \text{ schneiden sich in einem Punkt } \iff \frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$$

4.5.3 Satz (Satz von Menelaos)

Voraussetzungen siehe Satz von Ceva, d. h. $\triangle(A, B, C)$, Punkte A_1, B_1, C_1 auf Verlängerungen der Dreiecksseiten.
Dann gilt:

$$A_1, B_1, C_1 \text{ kollinear } \iff \frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = +1$$

Skizze:



Beweis

Übungsaufgabe.

□

4.6 Schnittpunkte im Dreieck

(a) Schwerpunkt eines Dreiecks

4.6.1 Satz ()

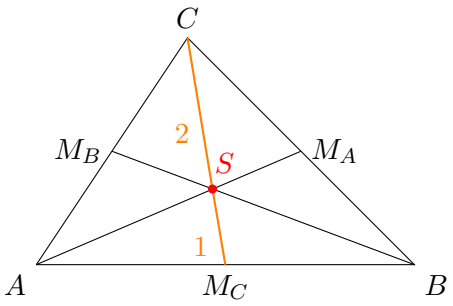
Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck mit Seitenmittelpunkten

$$M_A = \frac{1}{2}(B + C) \ , \ M_B = \frac{1}{2}(A + C) \ , \ M_C = \frac{1}{2}(A + B)$$

Die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S. Dieser ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

und wird **Schwerpunkt** des Dreiecks genannt. Der Puntk S teilt $\overline{CM_C}$ im Verhältnis 2 : 1; analog für $\overline{AM_A}$ und $\overline{BM_B}$.



Beweis

Da M_A Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist, folgt

$$\overrightarrow{M_AC} = -\overrightarrow{M_AB}$$

und daher

$$\frac{\overrightarrow{M_AC}}{\overrightarrow{M_AB}} = -1$$

Analog für M_B und M_C.
Es folgt:

$$\frac{\overrightarrow{M_AC}}{\overrightarrow{M_AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{M_BA}}{\overrightarrow{M_BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{M_CB}}{\overrightarrow{M_CA}} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1$$

Mit dem Satz von Ceva (Satz 4.5.1) angewandt auf $\triangle(A,B,C)$ und M_A, M_B, M_C zusammen mit Bemerkung 4.5.2 folgt, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt S schneiden.
Da M_C Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, ist

$$\frac{\overrightarrow{AM_C}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}$$

Der Satz von Menelaos (Satz 4.5.3) angewandt auf das Dreieck $\triangle(M_C,B,C)$ und die Transversale durch A, S, M_A liefert

$$1 = \frac{\overrightarrow{AM_C}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{SM_C}} \cdot \frac{\overrightarrow{M_AB}}{\overrightarrow{M_AC}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{SM_C}} \implies \frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{SM_C}} = -\frac{2}{1} \implies \frac{\overrightarrow{CS}}{\overrightarrow{SM_C}} = \frac{2}{1}$$

Es folgt: S teilt $\overline{CM_C}$ im Verhältnis $2:1$.

$$\frac{\overrightarrow{CS}}{\overrightarrow{SM_C}} = \frac{2}{1} \implies \overrightarrow{CS} = 2\overrightarrow{SM_C}$$

also $S_C = 2(M_C - S)$. Löse nach S auf:

$$3S = 2M_C + C \overset{(*)}{=} A + B + C \implies S = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

$(*)$ $M_C = \frac{1}{2}(A+B)$

□

(b) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Sei W_C der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit der Geraden $g(A,B)$. Analog definiere W_A und W_B.

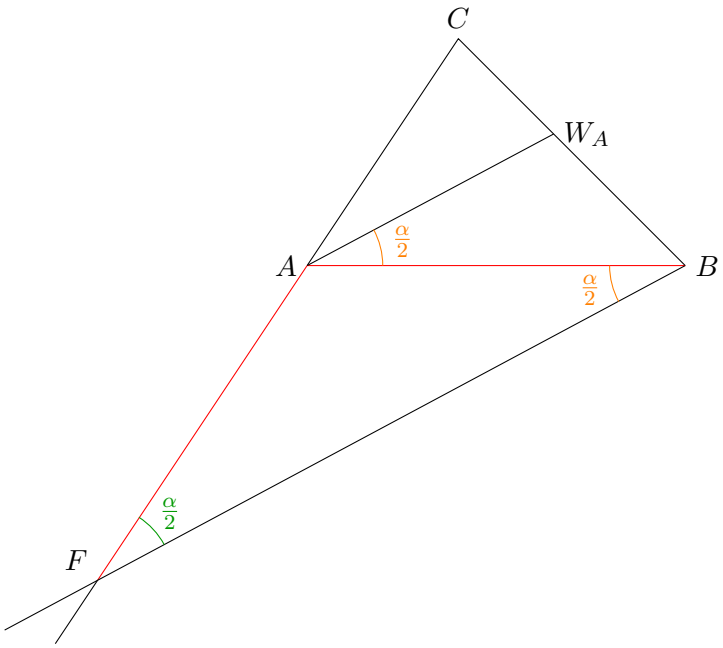
4.6.2 Lemma ()

Sei $\triangle(A,B,C)$ ein Dreieck. Jede Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten:

$$\frac{\overrightarrow{W_AC}}{\overrightarrow{W_AB}} = -\frac{b}{c}\ ,\ \frac{\overrightarrow{W_BA}}{\overrightarrow{W_BC}} = -\frac{c}{a}\ ,\ \frac{\overrightarrow{W_CB}}{\overrightarrow{W_CA}} = -\frac{a}{b}$$

Beweis

Zeichne Parallele zu $g(A,W_B)$ durch B. Die Parallele schneidet $g(A,C)$ im Punkt F.



Satz 2.4.6 über Wechselwinkel an parallelen Geraden liefert:

$$\angle(A,B,F) = \angle(B,A,W_A) = \frac{\alpha}{2}$$

Satz 2.4.6 über Stufenwinkel an parallelen Geraden liefert:

$$\angle(B,F,A) = \angle(W_A,A,C) = \frac{\alpha}{2}$$

Mit Satz 4.1.8 ist daher das Dreieck $\triangle(A,F,B)$ gleichschenklig. Daher ist

$$c = |\overline{AB}| = |\overline{AF}| \qquad (*)$$

Orientierter Strahlensatz zum Zentrum C mit $g(A,W_A) \parallel g(F,B)$ liefert:

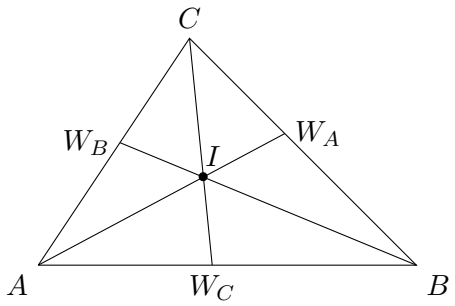
$$\frac{\overrightarrow{W_AC}}{\overrightarrow{W_AB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AF}} = -\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AF}|} \overset{(*)}{=} -\frac{b}{c}$$

Analog für W_B und W_C.

□

4.6.3 Satz ()

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein beliebiges Dreieck. Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt I. Der Punkt I ist gleichweit von jeder Seite entfernt.



Beweis

Mit Lemma 4.6.2 folgt

$$\frac{\overrightarrow{W_AC}}{\overrightarrow{W_AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{W_BA}}{\overrightarrow{W_BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{W_CB}}{\overrightarrow{W_CA}} = \left(-\frac{b}{c}\right) \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

Mit Satz 4.5.1 und Bemerkung 4.5.2 folgt, dass ein gemeinsamer Schnittpunkt existiert. Rest in Übungen.

□

4.6.4 Bemerkung ()

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist gerade der Inkreismittelpunkt; mehr dazu im Kapitel V.

(c) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

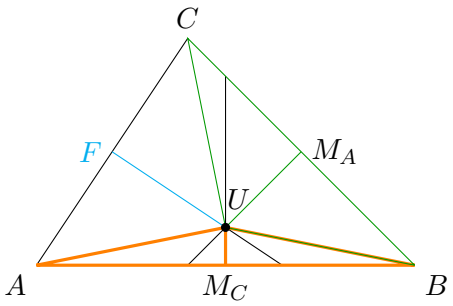
4.6.5 Satz ()

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt U. Dieser ist gleichweit von jedem Eckpunkt entfernt, d. h.

$$d(U, A) = d(U, B) = d(U, C)$$

Beweis

Sei U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ mit der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$.



Dann gilt:

$$\triangle(A, M_C, U) \cong \triangle(M_C, B, U) \quad \text{(SWS)}$$
$$\triangle(U, B, M_A) \cong \triangle(U, M_A, C) \quad \text{(SWS)}$$

Es folgt:

$$|\overline{UA}| = |\overline{UB}| = |\overline{UC}| \qquad (*)$$

Sei F Lotfußpunkt von U auf $\overline{AC}$. Dann gilt mit Satz von Pythagoras angewandt auf

$$\triangle(A, U, F): \ |\overline{AF}|^2 + |\overline{FU}|^2 = |\overline{AU}|^2$$
$$\triangle(F, U, C): \ |\overline{CF}|^2 + |\overline{FU}|^2 = |\overline{CU}|^2$$

Mit $(*)$ folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$|\overline{AF}|^2 = |\overline{CF}|^2$$

Daher ist $|\overline{AF}| = |\overline{CF}|$, also ist F der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$, $F = M_B$, und $g(F, U)$ ist damit die Mittelsenkrechte zu $\overline{AC}$.

□

4.6.6 Bemerkung ()

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Umkreismittelpunkt, siehe Kapitel V.

4.6.7 Lemma ()

Der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten stimmt genau dann mit dem Schwerpuntk überein, wenn $\triangle(A, B, C)$ gleichschenklig.

Beweis

Übungsaufgabe.

□

(d) Höhenschnittpunkt

4.6.8 Satz ()

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle(A, B, C)$. Dann schneiden sich die drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt H. Dieser Punkt erfüllt die Gleichung

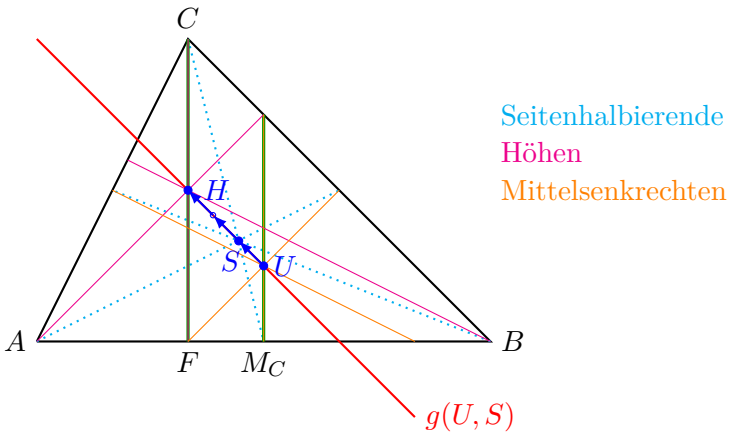
$$2\overrightarrow{US} = \overrightarrow{SH}$$

Beweis

Ist $\triangle(A, B, C)$ gleichseitig, so ist nach Lemma 4.6.7 $U = S$, jede Mittelsenkrechte stimmt mit der Seitenhalbierenden und mit der Höhe überein. Die Höhen schneiden sich damit in einem Punkt $H = S = U$. Die Gleichung $2\overrightarrow{US} = \overrightarrow{SH}$ ist trivialerweise erfüllt (mit $2 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ✓).
Sei ab jetzt $\triangle(A, B, C)$ NICHT gleichseitig. Dann ist nach Lemma 4.6.7 $S \neq U$. Sei $H \in g(S, U)$ mit

$$2\overrightarrow{US} = \overrightarrow{SH}$$

also $H = 3S - 2U \quad (*)$



Zeige: Jede Gerade durch H und einen Eckpunkt ist Höhe durch diesen Punkt.
hierzu: Nach Definition $(*)$ von H ist

$$\frac{\overrightarrow{SH}}{\overrightarrow{SU}} = -2$$

Nach Satz 4.6.1 ist

$$\frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{SM_C}} = -2$$

Also folgt

$$\frac{\overrightarrow{SH}}{\overrightarrow{SU}} = \frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{SM_C}} = -2$$

Mit orientiertem Strahlensatz zum Zentrum S folgt:

$$g(C, H) \parallel g(M_C, U)$$

Sei F der Schnittpunkt von $g(H,C)$ mit $g(A,B)$. Mit Satz über Stufenwinkel folgt aus $g(H,C) \parallel g(M_C,U)$:

$$\angle(B,F,C) = \angle(B,M_C,U) = 90^\circ$$

Damit folgt: $g(C,H)$ ist Höhe durch C und F ist Höhenfußpunkt, $F = H_C$.
Analog folgt: $g(B,H)$ ist Höhe durch B, $g(A,H)$ Höhe durch A.
Insbesondere ist H gemeinsamer Schnittpunkt der drei Höhen.

□

Eulergerade: Gerade durch U, S, H.

Ist $\triangle(A,B,C)$ spitzwinklig, so liegt H im Inneren des Dreiecks, ist $\triangle(A,B,C)$ stumpfwinklig, so liegt H außerhalb; ist $\triangle(A,B,C)$ rechtwinklig, so stimmt H mit dem Eckpunkt überein, an dem der rechte Winkel liegt.

Die Längen der Höhenabschnitte $h_a = |\overline{AH_A}|$, $h_b = \overline{BH_B}|$ und $h_c = |\overline{CH_C}|$ lassen sich über die Größen des Dreiecks berechnen:

4.6.9 Lemma ()

Für die Längen h_a, h_b, h_c der Höhenabschitte gilt:

$$h_a = c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\gamma) \quad ; \quad h_b = c \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\gamma) \quad ; \quad h_c = a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$$

Mithilfe der Höhenabschnitte lässt sich der Flächeninhalt $\triangle$ berechnen als:

$$\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Beweis

Übungsaufgabe.

□

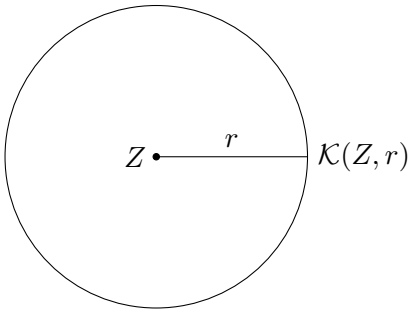
V Der Kreis

5.1 Mittelpunktsgleichung, Sekante und Tangente

5.1.1 Definition ()

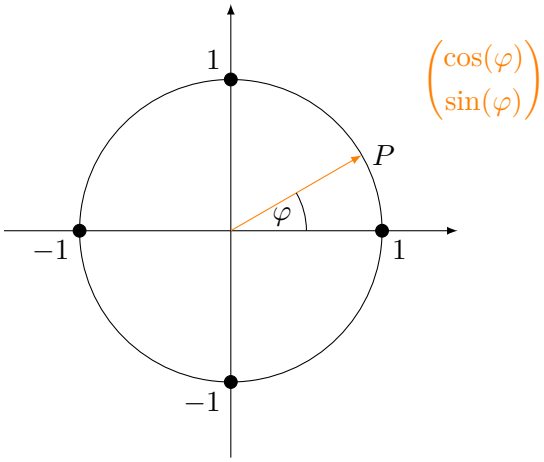
Sei $Z \in \mathbb{R}^2$, sei $r > 0$. Ein **Kreis** $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z,r)$ mit Mittelpunkt Z und Radius r ist der geometrische Ort aller Punkte P im $\mathbb{R}^2$, die von Z den Abstand r haben,

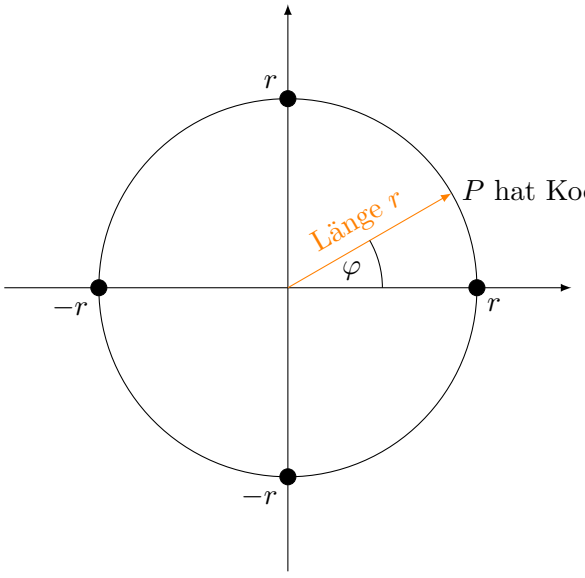
$$\mathcal{K}(Z,r) = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(Z,P) = r \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



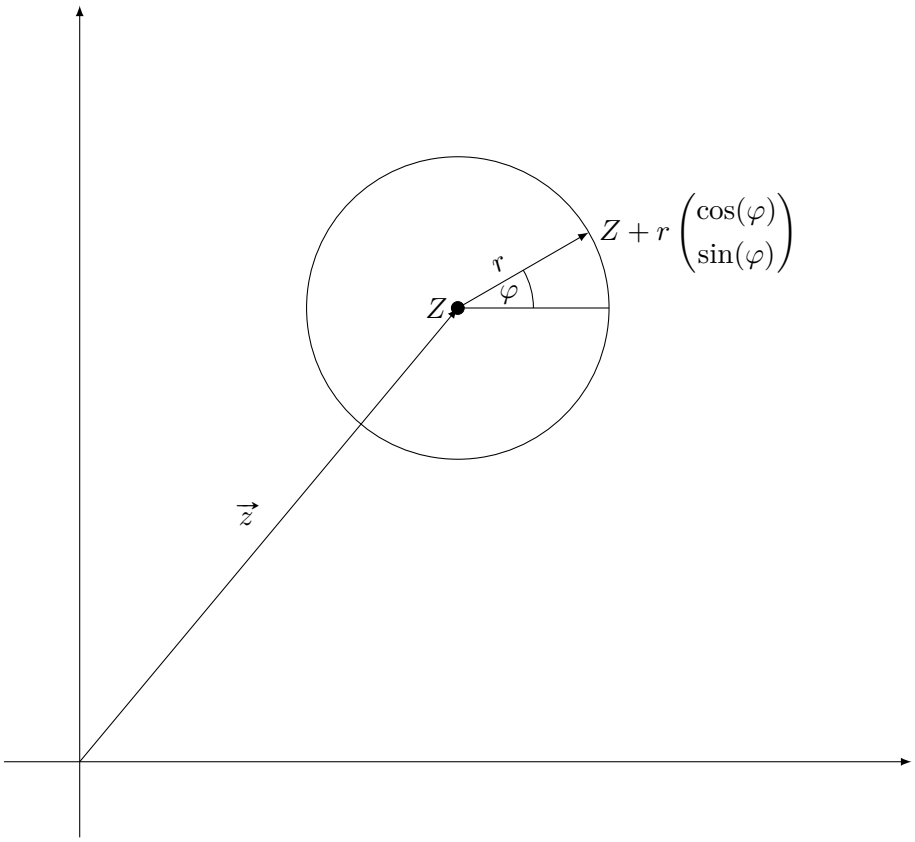
Alternativ: Parameterdarstellung:

$$\mathcal{K}(Z,r) = \left\{ Z + r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \varphi < 360^\circ \right\}$$



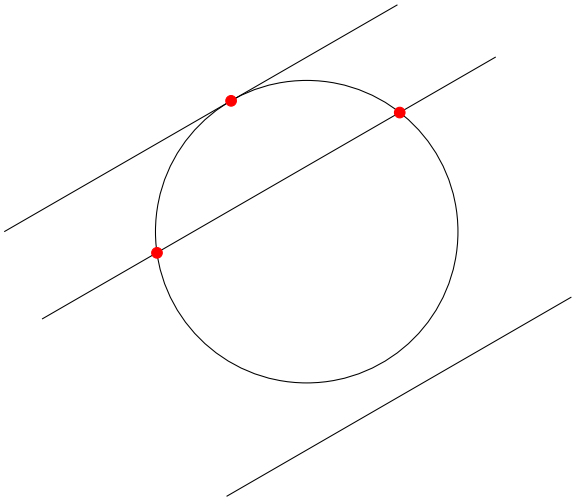


P hat Koordinatenvektor $r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$



5.1.2 Satz ()

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ ein Kreis und g Gerade im $\mathbb{R}^2$. Dann besetht der Durchschnitt $\mathcal{K} \cap g$ aus maximal zwei Punkten.



Beweis

Sei $g = \vec{q} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}$ Parameterdarstellung von g. Dann gilt:

$$P \in \mathcal{K} \cap g \iff \vec{p} = \vec{q} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } d(P, Z) = r$$

Wir rechnen:

$$d(P,Z) = \|\vec{p} - \vec{z}\| = \|\vec{q} + \lambda\vec{v} - \vec{z}\| \stackrel{!}{=} r$$

$$\iff \left\|\overrightarrow{ZQ} + \lambda\vec{v}\right\|^2 = r^2 \stackrel{\text{1.bin.Form.}}{\iff} \underbrace{\left\|\overrightarrow{ZQ}\right\|^2}_{\in\mathbb{R}} + 2\cdot\lambda\underbrace{\left\langle\overrightarrow{ZQ},\vec{v}\right\rangle}_{\in\mathbb{R}} + \lambda^2\underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{\in\mathbb{R}} = r^2$$

Man erhält also eine quadratische Gleichung für den Parameter λ. Diese besitzt maximal 2 Lösungen. Damit besteht $\mathcal{K}\cap g$ aus maximal zwei Punkten.

□

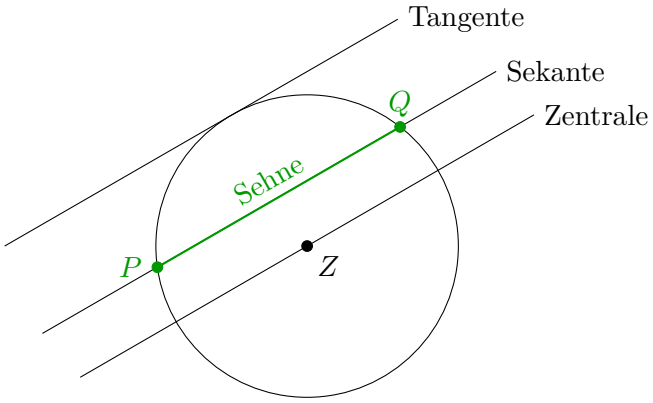
5.1.3 Definition ()

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z,r)$ ein Kreis. Eine Gerade g heißt

(a) **Sekante**, wenn $\mathcal{K}\cap g$ aus genau zwei Punkten besteht.

(b) **Zentrale**, wenn g Sekante druch Z ist.

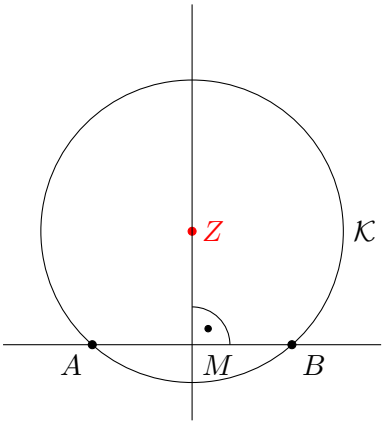
(c) **Tangente**, wenn $\mathcal{K}\cap g$ aus genau einem Punkt besteht.



Ist q Sekante mit $g\cap\mathcal{K} = \{P,Q\}$, so nennen wir $\overline{PQ}$ **Sehne** des Kreises.

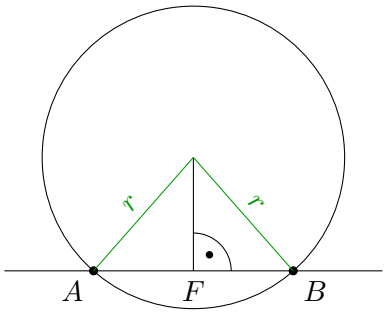
5.1.4 Satz (Sekantensatz)

Sei g Sekante zu $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z,r)$ und $g\cap\mathcal{K} = \{A,B\}$. Dann liegt Z auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$.



Beweis

Sei F Lotfußpunkt von Z auf $\overline{AB}$.



Da $A, B \in \mathcal{K}$, so ist $|\overline{ZA}| = |\overline{ZB}| = r$. Mit Satz Pythagoras angewandt auf $\triangle(A, F, Z)$ und $\triangle(F, B, Z)$ folgt:

$$|\overline{AF}|^2 = |\overline{AZ}|^2 - |\overline{ZF}|^2 = r^2 - |\overline{ZF}|^2 = |\overline{BZ}|^2 - |\overline{ZF}|^2 = |\overline{BF}|^2$$

Es folgt:

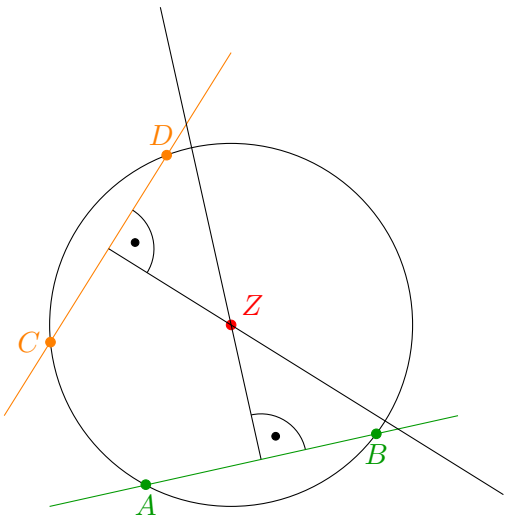
$$|\overline{AF}| = |\overline{BF}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$$

Daher liegt Z auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$.

□

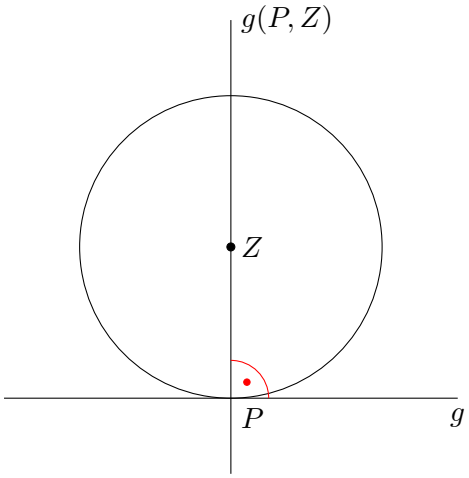
5.1.5 Bemerkung (Anwendung: Bestimmung des Mittelpunkts eines Kreises)

Soll der Mittelpunkt eines Kreises bestimmt werden, so wähle zwei (beliebige) Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und konstruiere die Mittelsenkrechten zu den Sehnen. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist dann der Kreismittelpunkt.



5.1.6 Satz (Tangentensatz)

Sei g Tangente an $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ mit $\mathcal{K} \cap g = \{P\}$. Dann ist $g \perp g(P, Z)$.



Beweis

Sei $g = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}$ Parameterdarstellung. Da g Tangente ist, gilt $d(Q, Z) \geq r$ für alle $Q \in g$. Mit $\vec{q} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt

$$d(Q,Z)^2 = \|\vec{q} - \vec{z}\|^2 = \|\vec{p} + \lambda\vec{v} - \vec{z}\|^2 = \left\|\overrightarrow{ZP} + \lambda\vec{v}\right\|^2 \overset{!}{\geq} r^2 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Mit „1. binomischer Formel“ für Normen folgt hieraus:

$$\left\|\overrightarrow{ZP}\right\|^2 + 2 \cdot \lambda \left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle + \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 \geq r^2 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Da $\left\|\overrightarrow{ZP}\right\|^2 = r^2$, folgt:

$$2\lambda \left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle + \lambda^2 \|\vec{v}\|^2 \geq 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Setze speziell $\lambda = -\frac{\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ in die Ungleichung ein und erhalte

$$-2 \cdot \frac{\left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle + \left(\frac{\left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle}{\|\vec{v}\|^2} \right)^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \geq 0$$

Es folgt also

$$-\frac{\left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle^2}{\|\vec{v}\|^2} \geq 0$$

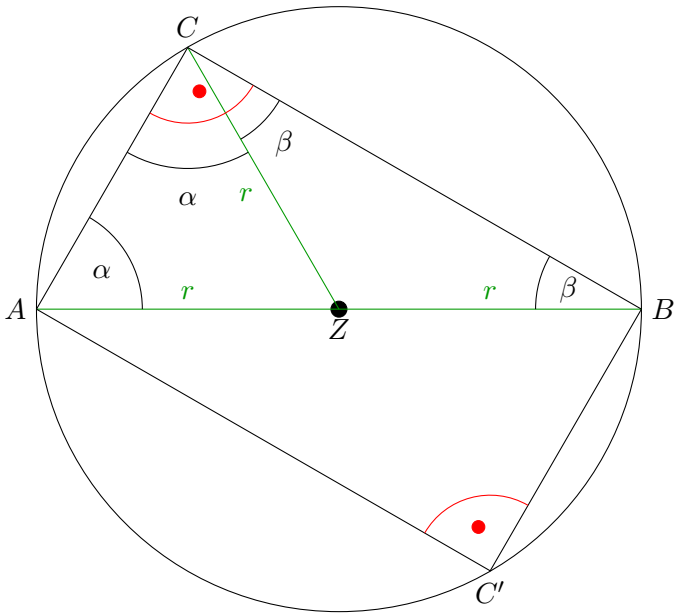
Hieraus folgt: $\left\langle \overrightarrow{ZP}, \vec{v} \right\rangle = 0$, also $\overrightarrow{ZP} \perp \vec{v} \implies g(Z, P) \perp g$.

□

5.2 Winkel im Kreis

5.2.1 Satz (Satz des Thales)

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ ein Kreis, sei g Zentrale zu $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} \cap g = \{A, B\}$. Sei $C \in \mathcal{K} \setminus \{A, B\}$.
Dann ist $\triangle(A, B, C)$ bzw. $\triangle(A, C, B)$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.



Beweis

Wir betrachten $\triangle(A, B, C)$ (für $\triangle(A, C, B)$ analog).
Da $A, B, C \in \mathcal{K}$, sind $\triangle(A, Z, C)$, $\triangle(Z, B, C)$ gleichschenklig.
Es folgt: $\alpha = \sphericalangle(Z, A, C) = \sphericalangle(A, C, Z)$; $\beta = \sphericalangle(C, B, Z) = \sphericalangle(Z, C, B)$.
Für den Winkel bei Z gilt:

$$180^\circ = \sphericalangle(B, Z, A) = \sphericalangle(B, Z, C) + \sphericalangle(C, Z, A) = (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\alpha) = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

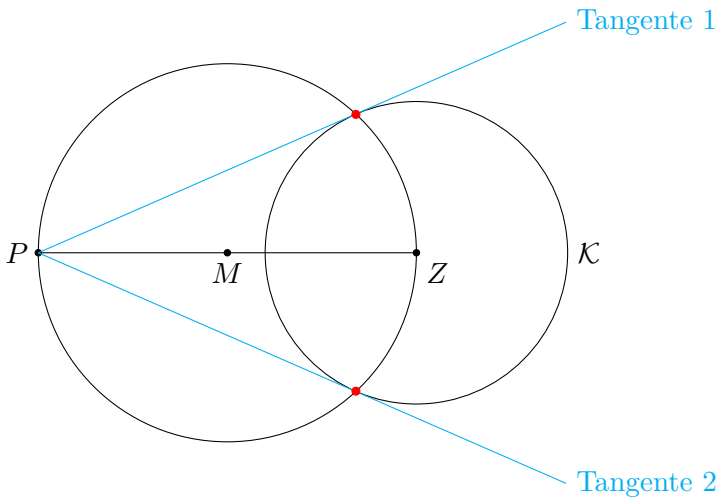
Es folgt: $\alpha + \beta = 90^\circ$. Daher $\sphericalangle(A, C, B) = \alpha + \beta = 90^\circ$.

□

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung des Satzes (*siehe Übungen*).

5.2.2 Bemerkung (Anwendung: Tangentenkonstruktion)

Gegeben sei ein Kreis $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ und ein Punkt P außerhalb des Kreises.

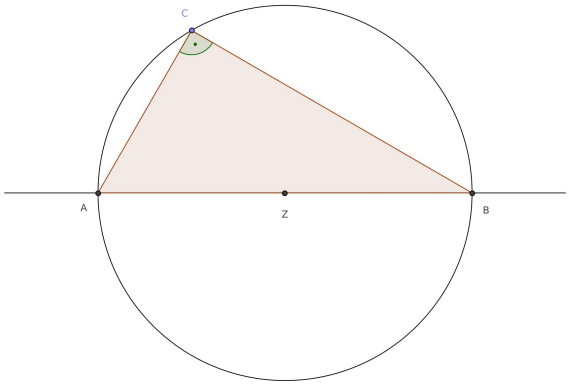


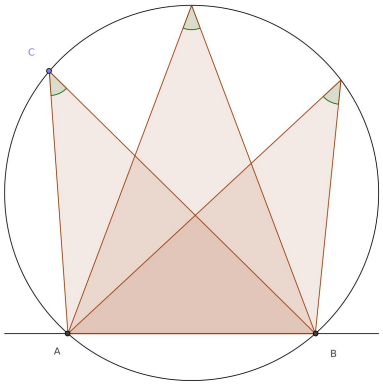
Will man eine Tangente zu $\mathcal{K}$ durch P konstruieren, so geht man wie folgt vor:

(a) Bestimme Mittelpunkt M von $\overline{PZ}$

(b) Zeichne Kreis zum Mittelpunkt M und Radius $R = \frac{|\overline{PZ}|}{2}$

(c) Die Schnittpunkte des Thaleskreis mit $\mathcal{K}$ sind die Berührpunkte der Tangente durch P.





5.2.3 Definition ()

Seien A, B zwei Punkte auf einem Kreis $\mathcal{K}$.

(a) Ist $C \in \mathcal{K}$, $C \notin \overline{AB}$, dann nennt man den Winkel $\sphericalangle(A, C, B)$ bzw. $\sphericalangle(B, C, A)$ bei C **Peripheriewinkel** oder **Umfangswinkel**.

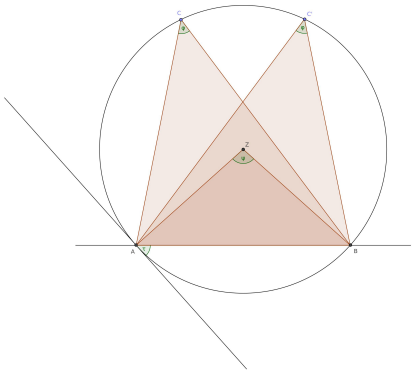
(b) Der Winkel $\sphericalangle(A, Z, B)$ bzw. $\sphericalangle(B, Z, A)$ beim Mittelpunkt Z des Kreises $\mathcal{K}$ heißt **Zentriwinkel** oder **Mittelpunktswinkel**.

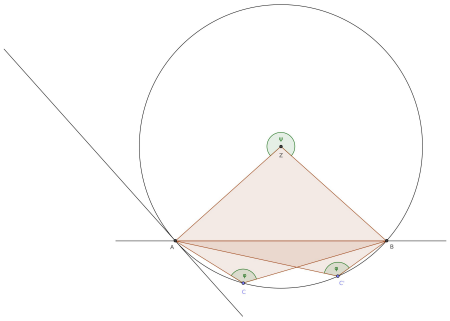
5.2.4 Satz (Satz über Peripheriewinkel)

(a) Alle Peripheriewinkel über demselben Kreisboge sind gleich groß.

(b) Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

(c) Der Peripheriewinkel ist ebenso groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel.



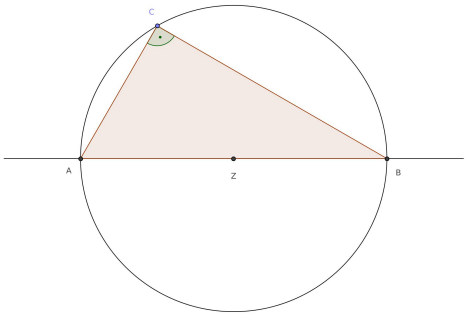


$$\psi = 2\varphi$$

Beweis

Seien $A, B, C \in \mathcal{K}$. Sei φ der Peripheriewinkel bei C zur Sehne $\overline{AB}$ und ψ der Zentriwinkel über der gleichen Sehne.

1. Fall: $Z \in \overline{AB}$

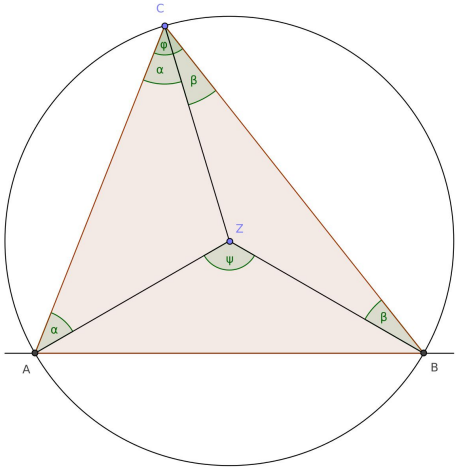


Nach Satz 5.2.1 ist $\varphi = 90°$.
Bei Z liegt ein gestreckter Winkel vor; daher ist $\psi = 180° = 2 \cdot \varphi$.
Nach Satz 5.1.6 ist $\tau = 90° = \varphi$.

Daher ab jetzt $Z \notin \overline{AB}$.

2. Fall

Z, C liegen in der gleichen Halbebene bzgl. $\overline{AB}$.
Z liege im Inneren des Dreiecks $\triangle(A, B, C)$.



Da $\triangle(A, Z, C)$ und $\triangle(B, C, Z)$ gleichschenklig sind, gilt:

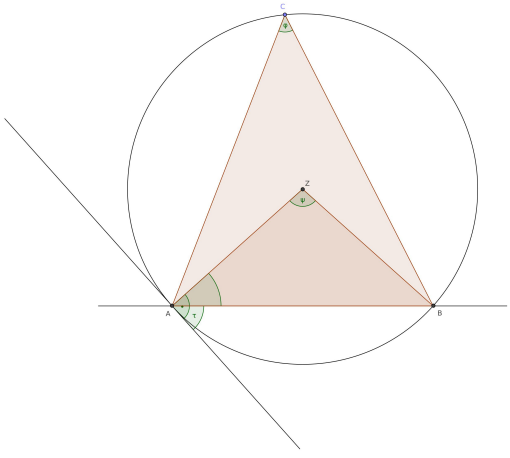
$$\alpha = \sphericalangle(Z, A, C) = \sphericalangle(A, C, Z)\beta = \sphericalangle(C, B, Z) = \sphericalangle(Z, C, B)$$

Außerdem gilt: $\alpha + \beta = \varphi$.

Vollwinkel bei Z:

$$360° = 180° - 2\alpha + 180° - 2\beta + \psi = 360° - 2(\alpha + \beta) + \psi \implies \psi = 2(\alpha + \beta) \overset{\alpha+\beta=\varphi}{=} 2\varphi$$

Da Zentriwinkel ψ unabhängig von der Wahl von C sind, sind alle Peripheriewinkel zu Punkten c, die obige Bedingungen (also C & Z in einer Halbebene bzgl. $\overline{AB}$ und Z im Inneren von $\triangle(A, B, C)$) erfüllen, gleich groß.



Da die Tangente senkrecht zu $\overline{AZ}$ ist und da $\triangle(A, B, Z)$ gleichschenklig ist, folgt:

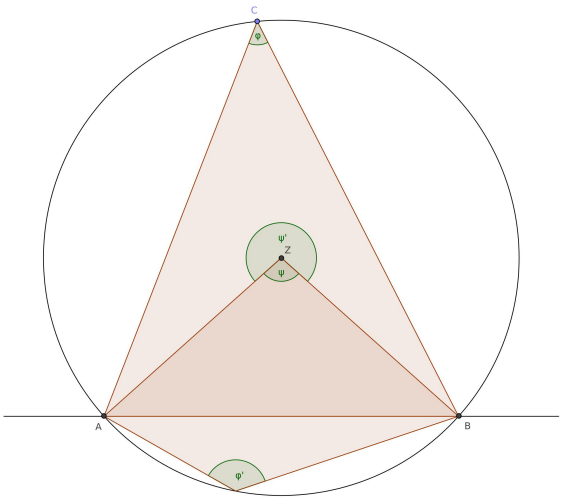
$$\tau = 90° - \frac{1}{2}(180° - \psi) = \frac{1}{2} \cdot \psi \overset{2\varphi=\psi}{=} \varphi$$

Die verbleibenden Fälle sind Übungsaufgaben.

□

5.2.5 Wiederholung ()

Peripheriewinkel auf unterschiedlichen Kreisbögen ergänzen sich zu 180°.



$$\varphi + \varphi' = 180°$$

Beweis

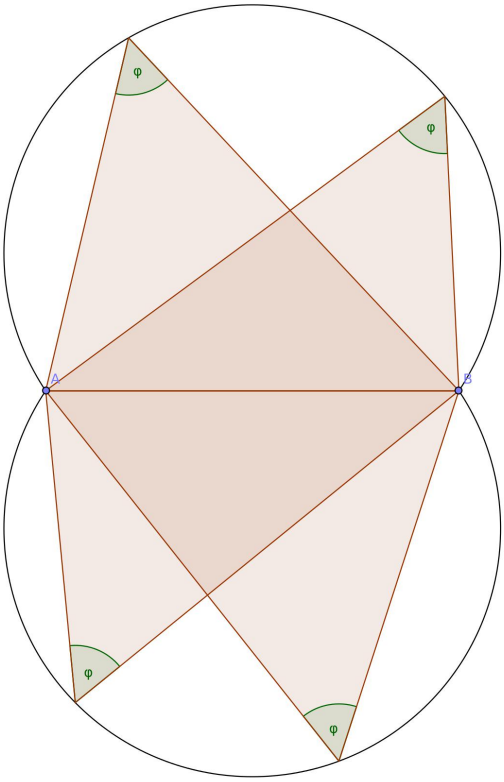
Seien φ und φ' Peripheriewinkel auf verschiedenen Seiten bzgl. $\overline{AB}$ mit zugehörigen Zentriwinkeln ψ und ψ'. Nach Satz 5.2.4,(b) ist $2\varphi = \psi$ und $2\varphi' = \psi'$.
Die Winkel ψ und ψ' bilden einen Vollwinkel bei Z, also $\psi + \psi' = 360°$.
Mit obigem folgt: $2\varphi + 2\varphi' = 360° \implies \varphi + \varphi' = 180°$.

□

5.2.6 Bemerkung ()

(a) Es gilt auch die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes: Ist $\sphericalangle(B, C, A) = \varphi$, so liegt C auf dem Kreisbogen zum Peripheriewinkel φ über $\overline{AB}$. Diesen Kreisbogen nennt man auch **Fasskreisbogen**.

(b) Ist $\overline{AB}$ eine gegebene Strecke, so ist die Ortslinie aller Punkte, die mit $\overline{AB}$ einen gegebene Winkel $\varphi \in]0°, 180°[$ einschließen, gegeben durch zwei Kreisbogenpaare.



Konstruktion für den Fall $0° < \varphi < 90°$:
Der Mittelpunkt Z des Kreises ergibt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ mit dem freien Schenkel des an A angetragenen Winkels der Größe $\alpha = 90° - \varphi$.
Der Winkel α kann konstruiert werden, indem man an $\overline{AB}$ den Winkel φ anzeichnet und das Lot durch A zum freien Winkelschenkel errichtet.

BILD folgende Konstruktion durchführen

1. Schritt: Mittelsenkrechte
2. Schritt: Zeichne φ an, errichte Lot

$\longrightarrow$ Schnittpunkt ist Z.

Ist $90° < \varphi < 180°$, so wähle $\alpha = \varphi - 90°$.

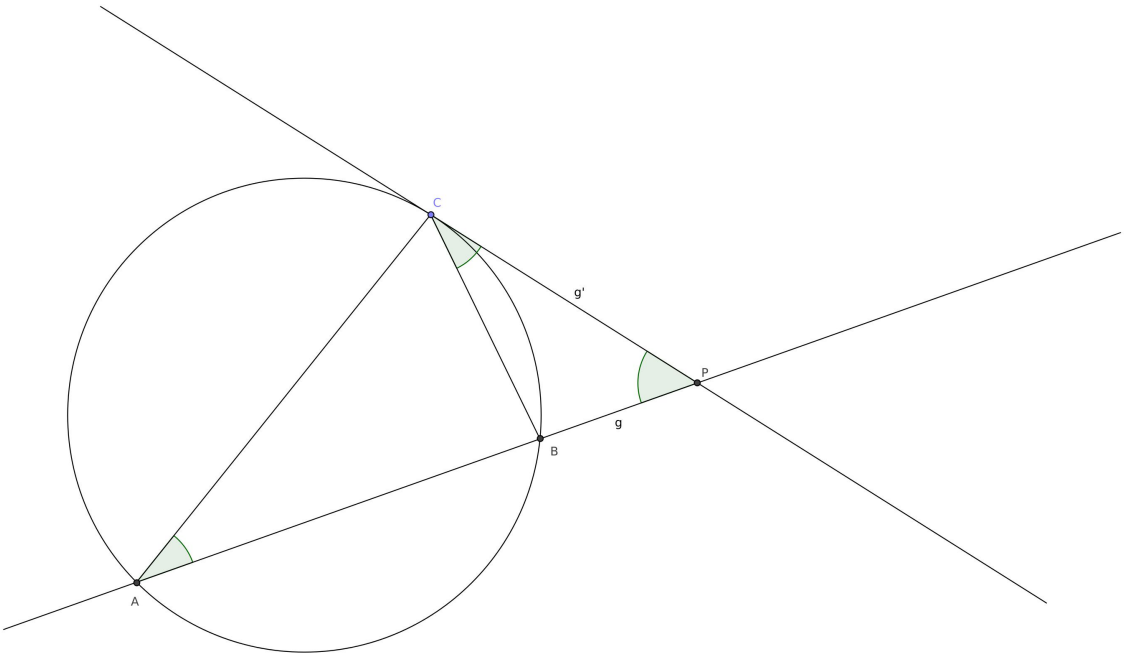
BILD auch hierfür Konstruktion durchführen

5.3 Streckenverhältnisse am geschnittenen Kreis

5.3.1 Satz (Sekanten-Tangenten-Satz)

Sei g Sekante zum Kreis $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} \cap g = \{A, B\}$. Sei g' Tangente durch $C \in \mathcal{K}$ mit $C \neq A, B$. Sei $g \nparallel g'$. Sei $\{P\} = g \cap g'$. Dann gilt:

$$|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CP}|^2$$



Beweis

Sei ohne Einschränkung $B \in \overline{AP}$, $\triangle(A, B, C)$ (sonst analoge Beweisführung).

Nach Satz 5.2.4 stimmt der Peripheriewinkel $\sphericalangle(B, A, C)$ mit dem Sehnen-Tangentenwinkel $\sphericalangle(B, C, P)$ überein.
Somit stimmen $\triangle(A, P, C)$ und $\triangle(B, P, C)$ in zwei Winkeln überein und sind daher ähnlich (gegensinnig). Es folgt:

$$\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{CP}|} = \frac{|\overline{CP}|}{|\overline{BP}|} \implies |\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CP}|^2$$

□

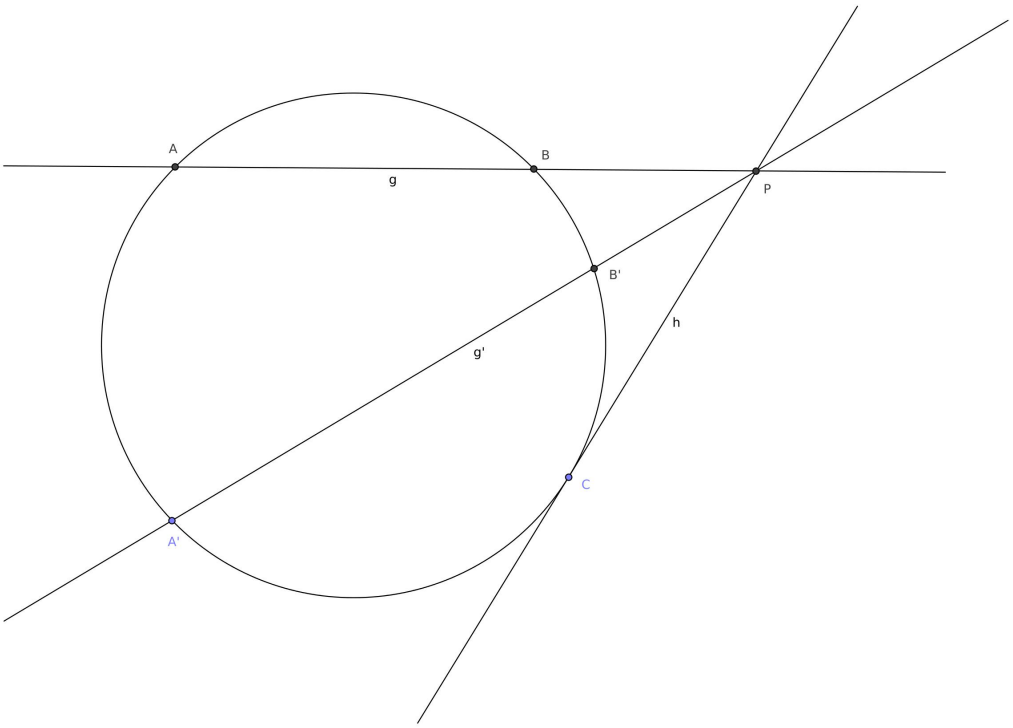
5.3.2 Satz (Sekantensatz)

Seien g, g' zwei sich im Punkt P schneidende Sekanten, wobei P außerhalb des Kreises $\mathcal{K}$ liege. Sei $g \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$ und $g' \cap \mathcal{K} = \{A', B'\}$. Dann gilt:

$$|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{A'P}| \cdot |\overline{B'P}|$$

Das Produkt der Sekantenabschnitte ist unabhängig von der Sekante.

Beweis



Sei h Tangente an $\mathcal{K}$ durch P mit Kreisschnittpunkt C.
Mit Satz 5.3.1 angewendet auf g und h: $|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CP}|^2$ Mit Satz 5.3.1 angewendet auf g' und h': $|\overline{A'P}| \cdot |\overline{B'P}| = |\overline{CP}|^2$

$$\Longrightarrow |\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{A'P}| \cdot |\overline{B'P}|$$

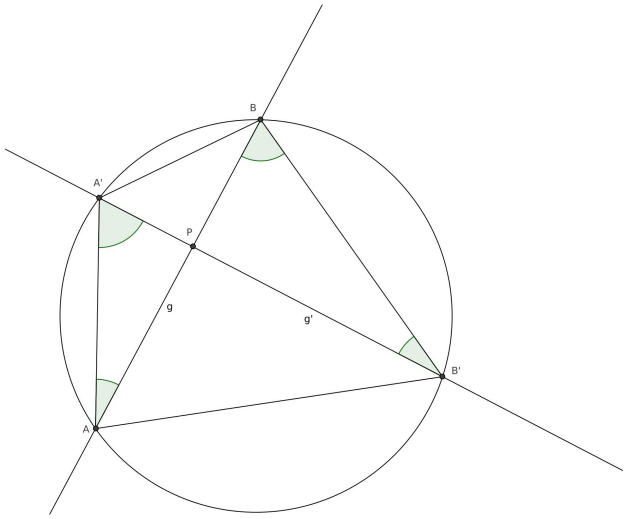
□

5.3.3 Satz (Sehnensatz)

Seien g, g' zwei sich im Punkt P schneidende Sekanten, wobei P innerhalb es Kreises $\mathcal{K}$ liegen soll. Sei $g \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$ und $g' \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$. Dann gilt:

$$|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{A'P}| \cdot |\overline{B'P}|$$

Beweis



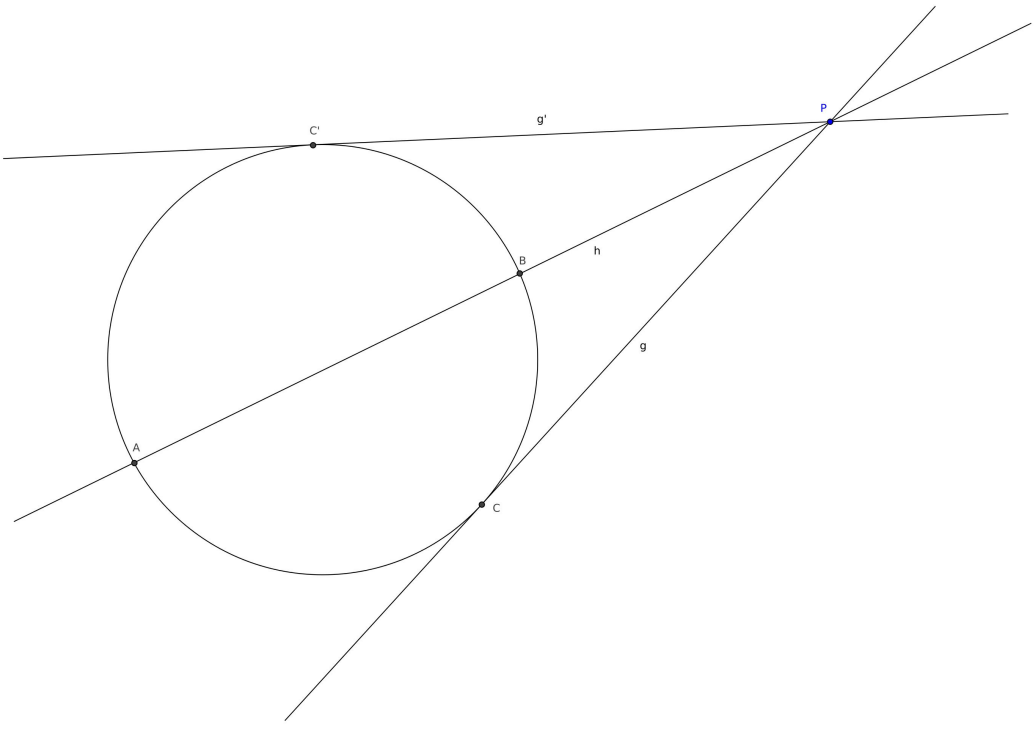
Ohne Einschränkung sei die Situation wie in der Skizze.
Satz 5.2.4 zur Sehne $\overline{A'B}$: $\sphericalangle(A, A', B) = \sphericalangle(A, B, B')$.
Satz 5.2.4 zur Sehne $\overline{BA'}$: $\sphericalangle(B, A, A') = \sphericalangle(B, B', A)$.
Es folgt: $\triangle(A, P, A') \sim \triangle(B', B, P) \implies \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{A'P}|} = \frac{|\overline{B'P}|}{|\overline{BP}|} \implies$ Behauptung.

□

5.3.4 Satz (Tangentensatz)

Seien g, g' zwei sich im Punkt P schneidende Tangenten an $\mathcal{K}$ mit Kreisschnittpunkten C bzw. C'. Dann ist $|\overline{CP}| = |\overline{C'P}|$.

Beweis



Sei h Sekante durch P, $h \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$.
Mit Satz 5.3.1 bzgl. g und h: $|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CP}|^2$ Mit Satz 5.3.1 bzgl. g' und h: $|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{C'P}|^2$
$\Longrightarrow \; |\overline{CP}| = |\overline{C'P}|$

□

5.4 Kreise am Dreieck

5.4.1 Satz (Inkreis)

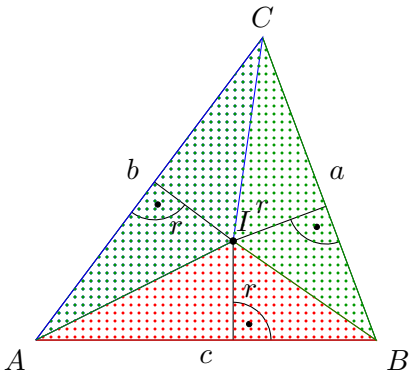
Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gibt es genau einen Kreis, der alle drei Dreiecksseiten berührt, der sogenannte **Inkreis**. Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden. Der Radius r des Inkreises ist

$$r = \frac{\Delta}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

wobei $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und Δ der Flächeninhalt des Dreiecks sind.

Beweis

Nach Satz 4.6.3 ist der Punkt I gleichweit von jeder Dreiecksseite entfernt; daher ist I Mittelpunkt des Inkreises.
Der Abstand des Punktes I zu einer Dreiecksseite ist gerade der Abstand des Punktes I zum Lotfußpunkt auf diese Dreiecksseite. Dieser Abstand ist der Radius des Inkreises.



$\frac{1}{2}cr \quad \frac{1}{2}br \quad \frac{1}{2}ar$

Das Dreieck $\triangle(A, B, C)$ mit Flächeninhalt Δ lässt sich durch I zerlegen in drei Teildreiecke $\triangle(A, B, I)$, $\triangle(B, C, I)$, $\triangle(C, A, I)$ mit Flächeninhalten $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$. Damit erhalten wir

$$\Delta = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{r}{2}(a+b+c) = r \cdot p \implies r = \frac{\Delta}{p}$$

Nach Satz 4.1.6 (Formel von Heron) ist $\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Damit folgt:

$$r = \frac{\Delta}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

□

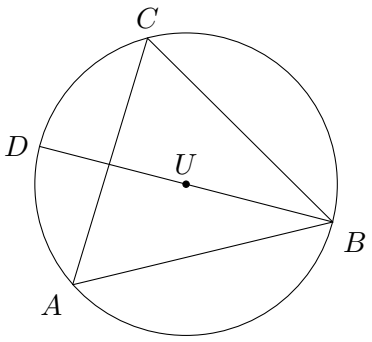
5.4.2 Satz (Umkreis)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gibt es genau einen Kreis, der durch alle drei Eckpunkte geht, der sogenannte **Umkreis** des Dreiecks. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten. Der Radius R des Umkreises ist gegeben als

$$R = \frac{a}{2\sin(\alpha)} = \frac{b}{2\sin(\beta)} = \frac{c}{2\sin(\gamma)} = \frac{abc}{4\Delta}$$

Beweis

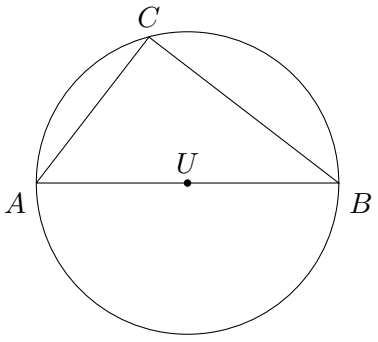
Nach Satz 4.6.5 ist U gleichweit von allen Eckpunkten des Dreiecks entfernt. Daher ist U Mittelpunkt des Umkreises.



Sei D der Schnittpunkt von $g(B, U)$ mit dem Umkreis.

Dann ist $\overline{DB}$ Zentrale des Umkreises. Fallunterscheidung nach Lage von D:

1. Fall: $D = A$

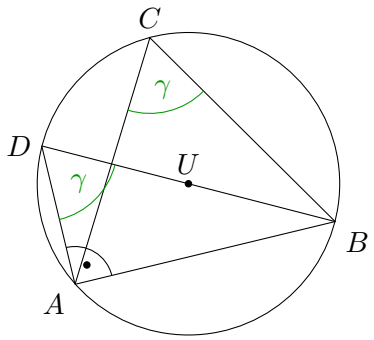


Dann ist $\overline{AB}$ Zentrale des Umkreises. Nach Satz von Thales (5.2.1) ist $\gamma = 90°$, daher $\sin(\gamma) = 1$.

Es ist

$$R = \frac{c}{2} \overset{\sin(\gamma)=1}{=} \frac{c}{2\sin(\gamma)}$$

2. Fall: $D \neq A$; C und D liegen auf demselben Kreisbogen bzgl. $\overline{AB}$



Nach Satz 5.2.4 (Peripheriewinkel) angewandt auf Sehne $\overline{AB}$ folgt

$$\sphericalangle(A, D, B) = \sphericalangle(A, C, B) = \gamma$$

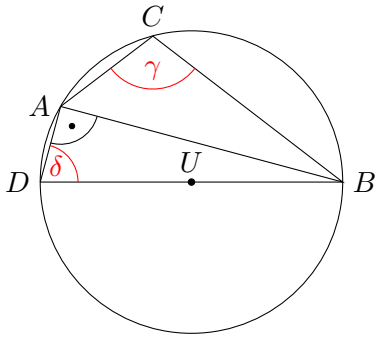
Da $\overline{BD}$ Zentrale, folgt mit Satz des Thales

$$\sphericalangle(B, A, D) = 90°$$

Wende Proposition 4.3.3 auf das rechtwinklige Dreieck $\triangle(D, A, B)$ an, dann folgt:

$$\sin(\gamma) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DB}|} = \frac{c}{2R} \implies R = \frac{c}{2\sin(\gamma)}$$

3. Fall: $D \neq A$; C und D liegen auf unterschiedlichen Kreisbögen bzgl. $\overline{AB}$



Da $\overline{BD}$ Zentrale folgt mit Satz des Thales $\sphericalangle(D, A, B) = 90°$. Für $\delta = \sphericalangle(B, D, A)$ gilt mit Proposition 4.3.3 angewandt auf das rechtwinklige Dreieck $\triangle(D, B, A)$:

$$\sin(\delta) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DB}|} = \frac{c}{2R}$$

Nach Folgerung 5.2.5 ist $\gamma + \delta = 180°$ $(*)$ (denn γ und δ sind Peripheriewinkel auf unterschiedlichen Kreisbögen bzgl. $\overline{AB}$). Damit ist

$$\sin(\gamma) \overset{(*)}{=} \sin(180° - \delta) \overset{\text{Sym. d. sin}}{=} \sin(\delta) = \frac{c}{2R} \implies R = \frac{c}{2\sin(\gamma)}$$

Nach Sinussatz ist

$$R = \frac{c}{2\sin(\gamma)} \overset{(**)}{=} \frac{a}{2\sin(\alpha)} \overset{(***)}{=} \frac{b}{2\sin(\beta)}$$

$(**)$ $\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)}$

$(***)$ $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$

Mit $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma$ folgt:

$$R = \frac{c}{2\sin(\gamma)} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)} = \frac{abc}{4\Delta}$$

□

Bemerkung: Sehnen- und Tangentenvierecke werden in dieser Vorlesung NICHT mehr behandelt.

Stichwortverzeichnis

A

Abstand . . . 9
Aufpunkt . . . 16

B

Basis . . . 43

D

Dreieck
    gleichschenklig . . . 43
    gleichseitig . . . 44
    rechtwinklig . . . 47
Dreiecke
    ähnliche . . . 52
    deckungsgleiche . . . *siehe* kongruente
    kongruente . . . 50

F

F-Winkel . . . 27
Fasskreisbogen . . . 75

G

Geraden
    echt parallele . . . 24
    parallel . . . 24
    windschiefe . . . 24

H

Halbgerade . . . 22
    komplementäre . . . 22
Hypotenuse . . . 47

K

Kathete . . . 47
kollinear . . . 23
Kreis . . . 65

L

Länge
    euklidische . . . 9
Länge der Strecke . . . 21

M

Mittelpunktswinkel . . . 72

N

Nebenwinkel . . . 26
Norm
    euklidische . . . 9
Nullvektor . . . 3

O

orthogonal . . . 13
Ortsvektor . . . 2

P

Parameterform . . . 16
Peripheriewinkel . . . 72
Polygon
    konvex . . . 45

R

Richtungsvektor . . . 16

S

Scheitelwinkel . . . 26
Schenkel . . . 43
Schwerpunkt . . . 59
Sehne . . . 68
Sekante . . . 68
senkrecht . . . 13
Skalarmultiplikation . . . 4
Skalarprodukt . . . 7
Standardraum $\mathbb{R}^n$ . . . 1
Strecke . . . 21
Stufenwinkel . . . 27

T

Tangente . . . 68

Transversale 54
Ecktransversale 54

U

Umfangswinkel 72

V

Vektoraddition 4
Verbindungsgerade 20

W

Wechselwinkel 28

Z

Z-Winkel 28
Zentrale 68
Zentriwinkel 72
Zweipunktform 20