Elementargeometrie

Zusammenfassung

WS 2013/2014

(Dr. Daniela Schiefeneder)

Julian Palme

(Stand: 11. Februar 2014)

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung 'Elementargeometrie', gelesen von Frau Dr. Daniela Schiefeneder im Wintersemester 2013/2014 an der Universität Regensburg. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

Dieses Dokument entspricht der Vorlesungsmitschrift, enthält jedoch *keine Beweise*!

Inhaltsverzeichnis

I Rechnen mit Vektoren **1**
1.1 Der n-dimensionale Raum . . . 1
1.1.1 Standardraum $\mathbb{R}^n$ (Def) . . . 1
1.1.2 „Geordnet“ (Bem) . . . 1
1.1.3 Beziehung zwischen Punkt und Vektor (Bem) . . . 2
1.2 Vektoraddition und Skalarmultiplikation . . . 4
1.2.1 Skalarmultiplikation (Def) . . . 4
1.2.2 Aufgabe . . . 6
1.2.3 Rechenregeln (Satz) . . . 6
1.3 Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ . . . 6
1.3.1 Skalarprodukt (Def) . . . 6
1.3.2 Aufgabe . . . 7
1.3.3 Rechenregeln Skalarprodukt (Satz) . . . 7
1.4 Länge eines Vektors . . . 7
1.4.1 Euklidische Länge bzw. Norm und Abstand (Def) . . . 7
1.4.2 Pythagoras (Bem) . . . 7
1.4.3 Aufgabe . . . 8
1.4.4 Eigenschaften der Norm (Satz) . . . 8
1.4.5 Parallelogrammgleichung, Polarisationsgleichung (Satz) . . . 8
1.4.6 Zwei wichtige Ungleichungen (Satz) . . . 9
1.4.7 Eigenschaften der Abstandsfunktion d (Satz) . . . 9
1.5 Winkel zwischen zwei Vektoren . . . 10
1.5.1 Winkel zwischen zwei Vektoren (Def) . . . 10
1.5.2 Aufgabe . . . 11
1.5.3 Cosinussatz (Satz) . . . 11
1.5.4 Orthogonale Vektoren (Lemma) . . . 11

II Geraden, Strecken, Halbgeraden **13**
2.1 Parameterform einer Geraden . . . 13
2.1.1 Parameterform einer Geraden (Def) . . . 13
2.1.2 Aufgabe . . . 13
2.1.3 (Satz) . . . 14
2.1.4 Folgerung . . . 15
2.1.5 Beispiel zur Folgerung 2.1.4 (Bsp) . . . 15
2.1.6 Gerade als Lösungsmenge (Bem) . . . 16
2.2 Strecken und Halbgeraden . . . 16
2.2.1 Strecke, Länge einer Strecke (Def) . . . 16
2.2.2 (Bem) . . . 16
2.2.3 Aufgabe . . . 16
2.2.4 Halbgerade (Def) . . . 17
2.3 Kollinearität, Lagebeziehungen zwischen Geraden . . . 17
2.3.1 kollinear (Def) . . . 17
2.3.2 kollinear (Bem) . . . 17
2.3.3 (Satz) . . . 18
2.3.4 Geraden – parallel bzw. windschief (Def) . . . 18
2.3.5 (Bem) . . . 18
2.4 Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden . . . 19
2.4.1 Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden (Def) . . . 19
2.4.2 Wohldefiniertheit des Winkels zwischen (Halb)Geraden (Bem) . . . 19

2.4.3 Scheitelwinkel, Nebenwinkel (Def) . . . 20
2.4.4 Nebenwinkel, Scheitelwinkel (Satz) . . . 21
2.4.5 Stufenwinkel, Wechselwinkel (Def) . . . 21
2.4.6 (Satz) . . . 21

III Strahlensatz und Folgerungen 22
3.1 Teilverhältnis . . . 22
3.1.1 (Def) . . . 22
3.1.2 (Bem) . . . 22
3.2 Strahlensatz . . . 23
3.2.1 Strahlensatz (Satz) . . . 23
3.2.2 (Bem) . . . 24
3.2.3 Strahlensatz, nicht-orientiert (Satz) . . . 24
3.2.4 Umkehrung des Strahlensatzes im nicht-orientierten Fall (Satz) . . . 25
3.2.5 (Bem) . . . 25
3.3 Folgerungen aus Strahlensatz . . . 25
3.3.1 Parallelogrammlemma (Lemma) . . . 25
3.3.2 Satz von Pappos (Satz) . . . 26
3.3.3 Satz von Desargues (Satz) . . . 26

IV Dreiecke 27
4.1 Erste Dreiecksbetrachtungungen . . . 27
4.1.1 (Def) . . . 27
4.1.2 (Satz) . . . 27
4.1.3 Cosinussatz für Dreiecke (Satz) . . . 28
4.1.4 Sinussatz (Satz) . . . 28
4.1.5 (Def) . . . 28
4.1.6 Formel von Heron (Satz) . . . 29
4.1.7 (Def) . . . 29
4.1.8 (Satz) . . . 29
4.2 Winkelsumme und Außenwinkel . . . 30
4.2.1 (Satz) . . . 30
4.2.2 Winkelsumme Polygon (Satz) . . . 30
4.2.3 (Def) . . . 30
4.2.4 starker Außenwinkelsatz (Satz) . . . 31
4.2.5 schwacher Außenwinkelsatz (Kor) . . . 31
4.2.6 Umkehrung des Wechselwinkelsatzes (Satz) . . . 31
4.3 Rechtwinklige Dreiecke . . . 31
4.3.1 (Def) . . . 31
4.3.2 Satz des Pythagoras (Satz) . . . 31
4.3.3 (Prop) . . . 32
4.3.4 Höhensatz (Satz) . . . 32
4.3.5 Kathetensatz (Satz) . . . 32
4.4 Kongruente und ähnliche Dreiecke . . . 32
4.4.1 Kongruenzsatz (Satz) . . . 32
4.4.2 Ähnlichkeit (Satz) . . . 33
4.5 Satz von Ceva, Satz von Menelaos . . . 34
4.5.1 Satz von Ceva (Satz) . . . 34
4.5.2 Satz von Ceva (Bem) . . . 35
4.5.3 Satz von Menelaos (Satz) . . . 35
4.6 Schnittpunkte im Dreieck . . . 35

(a) Schwerpunkt eines Dreiecks **35**
4.6.1 (Satz) . . . 35

(b) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden **36**
4.6.2 (Lemma) . . . 36
4.6.3 (Satz) . . . 36
4.6.4 (Bem) . . . 36

(c) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten **36**
4.6.5 (Satz) . . . 36
4.6.6 (Bem) . . . 37
4.6.7 (Lemma) . . . 37

(d) Höhenschnittpunkt **37**
4.6.8 (Satz) . . . 37
4.6.9 (Lemma) . . . 37

V Der Kreis **37**
5.1 Mittelpunktsgleichung, Sekante und Tangente . . . 37
5.1.1 (Def) . . . 37
5.1.2 (Satz) . . . 39
5.1.3 (Def) . . . 39
5.1.4 Sekantensatz (Satz) . . . 40
5.1.5 Anwendung: Bestimmung des Mittelpunkts eines Kreises (Bem) . . . 40
5.1.6 Tangentensatz (Satz) . . . 41
5.2 Winkel im Kreis . . . 41
5.2.1 Satz des Thales (Satz) . . . 41
5.2.2 Anwendung: Tangentenkonstruktion (Bem) . . . 42
5.2.3 (Def) . . . 42
5.2.4 Satz über Peripheriewinkel (Satz) . . . 43
5.2.5 (Folgerung) . . . 43
5.2.6 (Bem) . . . 43
5.3 Streckenverhältnisse am geschnittenen Kreis . . . 44
5.3.1 Sekanten-Tangenten-Satz (Satz) . . . 44
5.3.2 Sekantensatz (Satz) . . . 45
5.3.3 Sehnensatz (Satz) . . . 45
5.3.4 Tangentensatz (Satz) . . . 45
5.4 Kreise am Dreieck . . . 45
5.4.1 Inkreis (Satz) . . . 45
5.4.2 Umkreis (Satz) . . . 46

Stichwortverzeichnis

I Rechnen mit Vektoren

1.1 Der n-dimensionale Raum

Es bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen.

1.1.1 Definition (Standardraum $\mathbb{R}^n$)

Der n-dimensionale **Standardraum $\mathbb{R}^n$** ist die Menge aller geordneten Tupel von n reellen Zahlen,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

1.1.2 Bemerkung („Geordnet")

„Geordnet" bedeutet, dass die Reihenfolge entscheidend, d. h. zwei Elemente

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^n$ stimmen überein, wenn sie in jeder Komponente übereinstimmen, also $v_i = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Interpretation von Elementen im $\mathbb{R}^n$

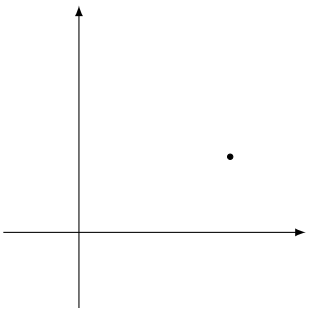
(a) als Punkt mit Ortskoordinaten $(v_1, \ldots, v_n)$ in einem kartesischen Koordinatensystem

(b) als Vektor in Richtung $(v_1, \ldots, v_n)$
Beachte: Ein Vektor ist eine Klasse von gerichteten Pfeilen, die in Richtung und Längen übereinstimmen.

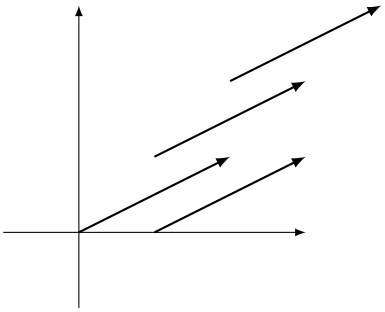
Beispiel

Was ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

(a) als Punkt

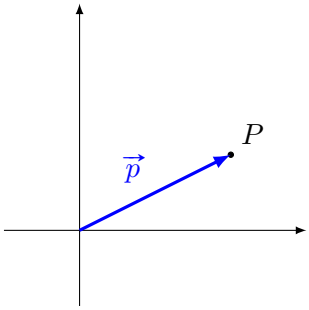


(b) als Vektor

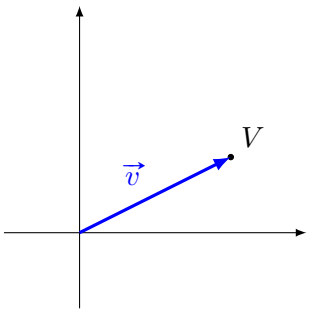


1.1.3 Bemerkung (Beziehung zwischen Punkt und Vektor)

Sei $P = (p_1, \ldots, p_n)$ ein Punkt im $\mathbb{R}^n$. Dann lässt sich P ein Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ zuordnen, der sogenannte **Ortsvektor** von P.



Andererseits: Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ein Vektor im $\mathbb{R}^n$. Dann kann $\vec{v}$ ein Punkt V mit Ortskoordinaten $(v_1, \ldots, v_n)$ zugeordnet werden.



Zur Unterscheidung schreiben wir Punkte als waagrechtes Tupel und bezeichnen sie mit Großbuchstaben. Vektoren schreiben wir als senkrechte Tupel und bezeichnen sie mit Kleinbuchstaben und Pfeil (z. B. $\vec{v}$).

Nullvektor und Ursprung

(a) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Vektor mit n Komponenten, alle sind 0, heißt **Nullvektor**.

(b) $0 = (0, \ldots, 0)$ Nullpunkt, Ursprung im Koordinatensystem.

Verbindungsvektoren

Seien P, Q zwei Puntke im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau einen Vektor $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$, sodass man beim Anhängen von $\vec{v}$ an P bei Q landet. Es ist

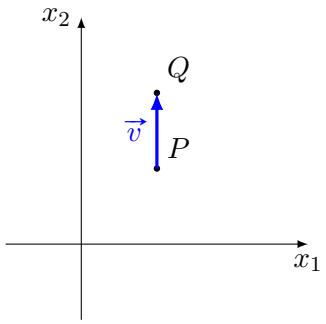
$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

In diesem Sinne gilt für den Ortsvektor $\vec{p}$ zum Punkt P

$$\vec{p} = \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Beispiel

$P(1,1)$, $Q(1,2)$



$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Vektoraddition und Skalarmultiplikation

1.2.1 Definition (Skalarmultiplikation)

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Zwei Vektoren werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert, d. h.

$$\vec{v} + \vec{w} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad (\underline{\textbf{Vektoraddition}})$$

(b) Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jede Komponente des Vektors mit diesem Skalar multipliziert, d. h.

$$\lambda \cdot \vec{v} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix} \quad (\underline{\textbf{Skalarmultiplikation}})$$

ACHTUNG: Nur Vektorn gleicher Größe können addiert werden!

Beispiel

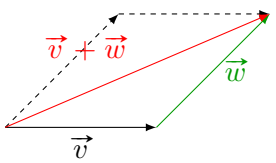
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist NICHT definiert!

Schreibweisen

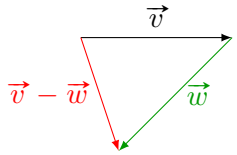
$$-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{pmatrix}$$

Anschauliche Bedeutung der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

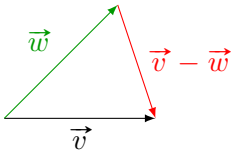
- Den Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ erhält man, indem man an den Endpunkt von $\vec{v}$ den Vektor $\vec{w}$ anhängt.



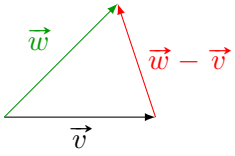
- Den Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ erhält man, indem man an den Endpunkt von $\vec{v}$ den Vektor $-\vec{w}$ anhängt.



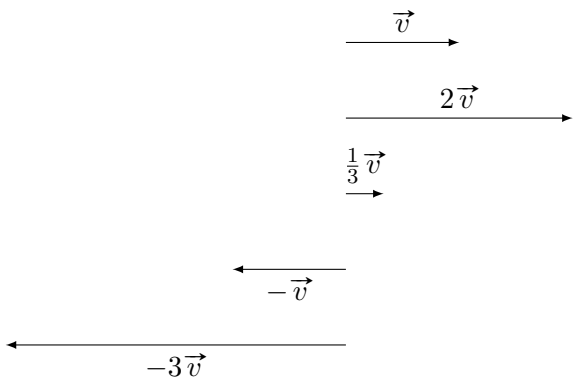
Der Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ ist derjenige Vektor, den man zu $\vec{w}$ addieren muss, um den Vektor $\vec{v}$ zu erhalten.



Den Vektor $\vec{v} - \vec{w}$ erhält man, indem man den Endpunkt von $\vec{w}$ mit dem Endpunkt von $\vec{v}$ verbindet.
ACHTUNG: $\vec{v} - \vec{w} \neq \vec{w} - \vec{v}$



- Der Vektor $\lambda\vec{v}$ ensteht aus $\vec{v}$ durch Strecken/Stauchen/Umkehren.
Genauer: Ist $\lambda > 0$, so zeigt $\lambda\vec{v}$ in die gleiche Richtung wie $\vec{v}$, wird also gestreckt, falls $\lambda > 1$ und gestaucht für $0 < \lambda < 1$.
Ist $\lambda < 0$, so zeigt $\lambda\vec{v}$ in die entgegengesetzte Richtung und wird zusätzlich um den Faktor $|\lambda|$ gestreckt/gestaucht.



1.2.2 Aufgabe

$$\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+2\\3+0\\2+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$3\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-4)\\3\cdot 3\\3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\9\\6\end{pmatrix}$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}-3\cdots\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\\6\\7\end{pmatrix}$$

1.2.3 Satz (Rechenregeln)

Seien $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Es gilt

(a) (i) Kommutativgesetz bzgl. Addition: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(ii) Assoziativgesetz bzgl. Addition: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

(iii) $\vec{0}$ ist neutrales Element: $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}=\vec{v}+\vec{0}$

(iv) $-\vec{v}$ ist inverses Element: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}=(-\vec{v})+\vec{v}$

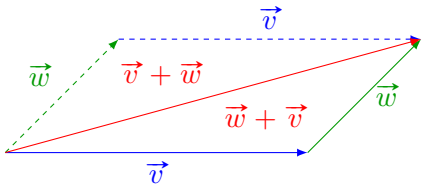
(b) (i) $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

(ii) $(\lambda+\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}+\mu\cdot\vec{v}$

(iii) $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{v}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{v})$

(iv) $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$

Kommutativgesetz anschaulich



Man sieht hier: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$

1.3 Das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

1.3.1 Definition (Skalarprodukt)

Seien $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$. Das **Skalarprodukt** von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist definiert als

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle:=\sum_{i=1}^{n}u_i\cdot v_i=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n$$

Bemerkung: Das Skalarprodukt bildet zwei Vektoren ab auf eine reelle Zahl.
Manchmal ließt man auch $\vec{u}\cdot\vec{v}$ statt $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.

1.3.2 Aufgabe

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) + 2 \cdot (-1) = 2 + 15 - 2 = 15$$

ACHTUNG: Das Skalarprodukt ist nur definiert für zwei Vektoren gleicher Länge.

Beispiel

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist NICHT definiert!

1.3.3 Satz (Rechenregeln Skalarprodukt)

Für beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

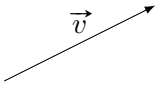
(a) Linearität im ersten Argument:
$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad ; \quad \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(b) Linearität im zweiten Argument:
$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \quad ; \quad \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(c) Symmetrie: $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

(d) Positivität: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

1.4 Länge eines Vektors



1.4.1 Definition (Euklidische Länge bzw. Norm und Abstand)

Die **(euklidische) Länge** oder auch **(euklidische) Norm** des Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Der **Abstand** zweier Punkte P, Q im $\mathbb{R}^n$ ist definiert als die Norm des Verbindungsvektors

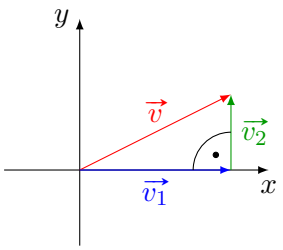
$$d(P,Q) := \left\| \overrightarrow{PQ} \right\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \ldots + (q_n - p_n)}$$

1.4.2 Bemerkung (Pythagoras)

Für Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ergibt sich

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Anschaulich:



Mit Pythagoras gilt: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

1.4.3 Aufgabe

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{30}$$

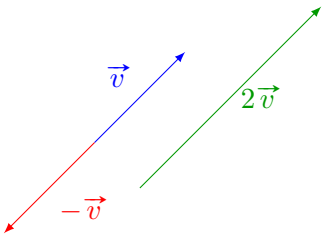
Die Norm $\|.\|$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$.

1.4.4 Satz (Eigenschaften der Norm)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$ und es gilt: $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

(b) $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$



(c) „Binomische Formeln“

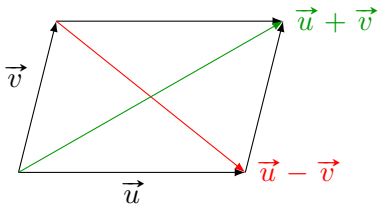
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$
- $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

1.4.5 Satz (Parallelogrammgleichung, Polarisationsgleichung)

Für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) Parallelogrammgleichung

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$$



(b) Polarisationsgleichung

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$

1.4.6 Satz (Zwei wichtige Ungleichungen)

Für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

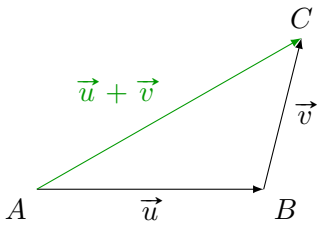
Gleichheit herrscht hier genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Dreiecksungleichung

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Gleichheit herrscht hier genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$ oder $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ für ein $\lambda \geq 0$.

Dreiecksungleichung anschaulich:



$$\left.\begin{aligned} b &< a + c \\ c &< a + b \\ a &< b + c \end{aligned}\right\} \text{ gilt in jedem Dreieck.}$$

Aus den Eigenschaften der Norm folgt:

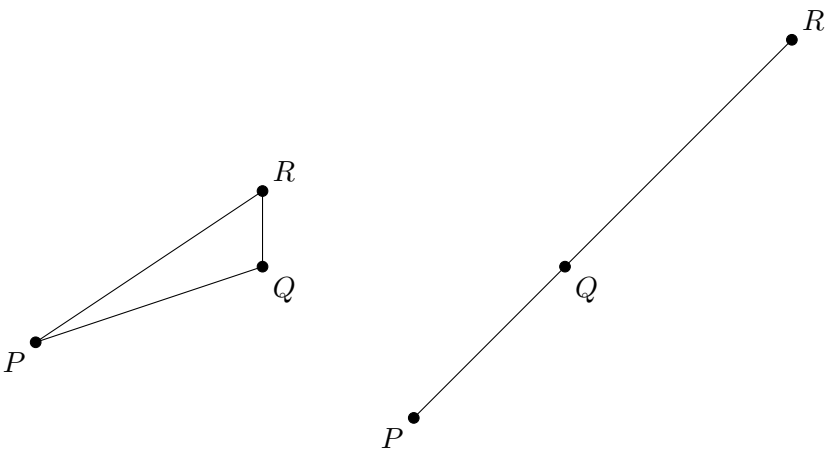
1.4.7 Satz (Eigenschaften der Abstandsfunktion d)

Seien P, Q, R Punkte in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(a) $d(P,Q) \geq 0$ und $d(P,Q) = 0 \iff P = Q$

(b) $d(P,Q) = d(Q,P)$

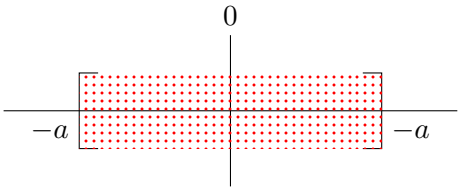
(c) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$



1.5 Winkel zwischen zwei Vektoren

Nach der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung gilt für alle $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \iff -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \leq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

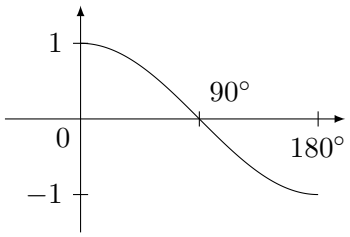


$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Falls $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\vec{v} \neq 0$: teile diese Ungleichung durch $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ $(\neq 0)$ und erhalte

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$$

Die Kosinus-Funktion ist eingeschränkt auf das Intervall $[0°, 180°]$ eine umkehrbare Funktion, die jedem Winkel $\vartheta \in [0°, 180°]$ genau eine reelle Zahl aus $[-1, 1]$ zuordnet.



Da $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 1}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$ existiert, also genau ein $\vartheta \in [0°, 180°]$, so dass $\cos(\vartheta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$. Dies benutzten wir für die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren:

1.5.1 Definition (Winkel zwischen zwei Vektoren)

(a) Der Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ zwischen zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$, beide $\neq \vec{0}$, ist definiert über

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) \in [0°, 180°]$$

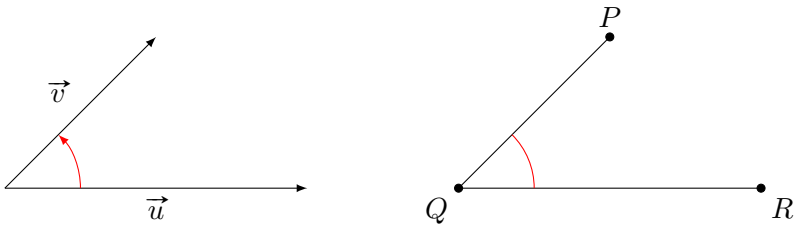
(b) Sind P, Q, R Punkte im $\mathbb{R}^n$, so schreiben wir $\angle(P,Q,R)$ statt $\angle\left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP}\right)$.

(c) Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ heißen **orthogonal** oder **senkrecht**, wenn

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

Schreibe dann $\vec{u} \perp \vec{v}$.

ACHTUNG: Die Schreibweise mit $\angle$ bedeutet, dass wir den nichtorientierten Winkel nehmen, also den Winkel zwischen 0° und 180°.
Insbesondere ist hier $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$ und $\angle(P,Q,R) = \angle(R,Q,P)$.



Den orientierten Winkel (der Werte zwischen 0° und 360° angibt) bezeichnen wir mit $\sphericalangle$.

1.5.2 Aufgabe

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \angle(\vec{u}, \vec{v}) &= \arccos\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{30}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{15}{\sqrt{420}}\right) \approx 0.75 \quad \text{(Bogenmaß)} \quad \approx 43° \end{aligned}$$

1.5.3 Satz (Cosinussatz)

Für $\vec{u}, \vec{v}$ im $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)$$

1.5.4 Lemma (Orthogonale Vektoren)

Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

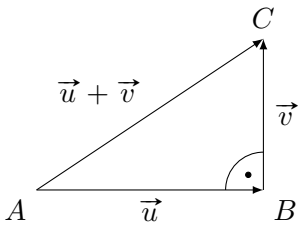
(a) $\vec{u} \perp \vec{v}$

(b) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

(c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

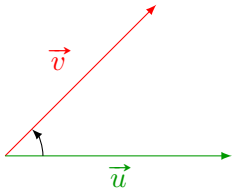
(d) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

zeige hier am besten $b \iff a$, $b \iff c$ und $b \iff d$

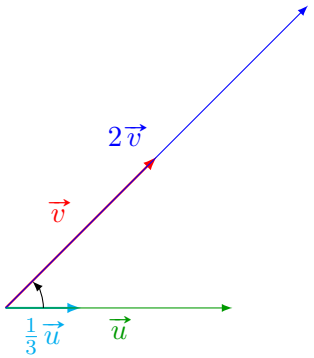


Weitere Eigenschaften des Winkelmaßes (Beweis teilweise in Übungen):

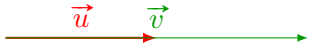
- $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \angle(\vec{v}, \vec{u})$



- Der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ hängt NICHT von der Länge der Vektoren ab, sondern nur von deren Richtung.
  $\angle(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ für alle $\lambda, \mu > 0$



- $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0° \iff \vec{u} = \beta\vec{v}$ für ein $\beta > 0$
  Also: 2 Vektoren schließen genau dann einen 0°-Winkel ein, wenn sie in die gleiche Richtung zeigen.



- $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 180° \iff \vec{u} = \beta\vec{v}$ für ein $\beta > 0$.
  Also: 2 Vektoren schließen genau dann einen 180°-Winkel ein, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind.



II Geraden, Strecken, Halbgeraden

2.1 Parameterform einer Geraden

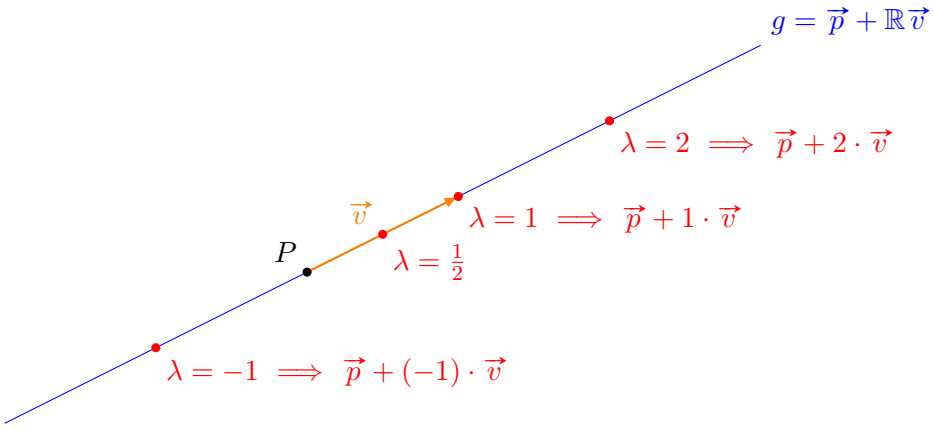
Eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ wird in der analytischen Geometrie durch einen Punkt und eine Richtung angegeben.

2.1.1 Definition (Parameterform einer Geraden)

Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^n$ mit Ortsvektor $\vec{p}$. Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Dann bildet die Menge

$$g = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v} = \left\{ \vec{p} + \lambda \vec{v} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Gerade durch P in Richtung $\vec{v}$. Diese Darstellung nennt man **Parameterform** der Geraden g. Der Punkt P heißt **Aufpunkt** der Geraden g, der Vektor $\vec{v}$ heißt **Richtungsvektor** von g.



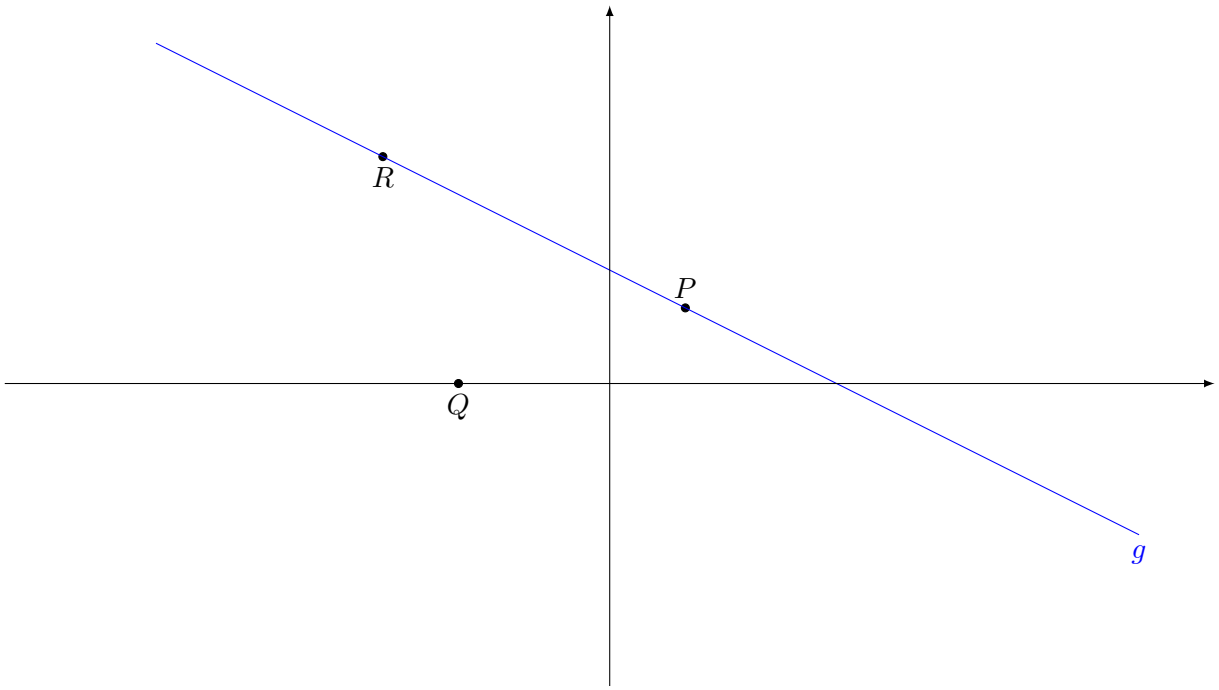
Wir schreiben $Q \in g$, wenn für seinen Ortsvektor $\vec{q}$ gilt:

$$\vec{q} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

Jeder Parameterwert λ liefert also einen Punkt auf der Geraden g.
Insbesondere ist $\vec{p} = \vec{p} + 0 \cdot \vec{v}$, also $P \in g$.

2.1.2 Aufgabe

$g = \binom{1}{1} + \mathbb{R}\binom{2}{-1}$, $Q(-2,0) \in g$?



Frage: Existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\binom{-2}{0} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{2}{-1}$?

Die Vektorgleichung liefert Gleichungssystem $\begin{cases} -2 = 1 + 2\lambda & (1) \\ 0 = 1 - \lambda & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $\lambda = 1$. Einsetzen in (1): $(-2) \neq 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$\Longrightarrow \mathbb{Q} \notin g$

$R(-3, 3)$. Frage: $R \in g$?

Ansatz: $\binom{-3}{3} = \binom{1}{1} + \lambda\binom{2}{-1} \implies \begin{cases} -3 = 1 + 2\lambda & (1) \\ 3 = 1 - \lambda & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $2 = -\lambda \implies \lambda = -2$.

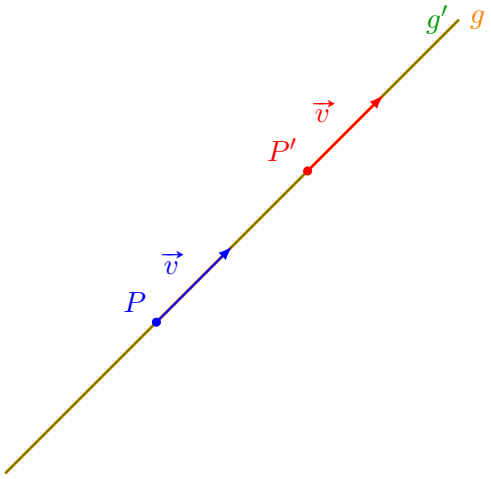
Einsetzen in (1): $-3 = 1 + 2 \cdot (-2) = 1 - 4$ ✓

Also gilt: $\binom{-3}{3} = \binom{1}{1} - 2\binom{2}{-1}$, daher gilt: $R \in g$.

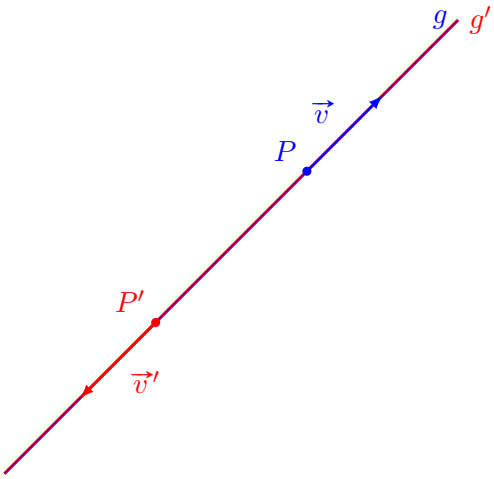
ACHTUNG: Aufpunkt und Richtungsvektor einer Geraden in Parameterform sind durch die Gearde NICHT eindeutig bestimmt!

2.1.3 Satz ()

(a) Sei $g = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ mit Aufpunkt P und Richtungsvektor $\vec{v}$. Ist P' ein Punkt auf der Geraden g und ist $g' = \vec{p}' + \mathbb{R}\vec{v}$ die Gerade mit Aufpunkt P' und Richtungsvektor $\vec{v}$, so stimmen g und g' überein.



(b) Seien $g = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \vec{v}$ und $g' = \vec{p}' + \mathbb{R} \cdot \vec{v}'$ zwei Geraden im $\mathbb{R}^n$. Dann stimmen diese Geraden genau dann überein, wenn $g \cap g' \neq \emptyset$ und $\vec{v}' = \beta \cdot \vec{v}$ für eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.



2.1.4 Folgerung

Zu je zwei verschiedenen Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Gerade g, die P und Q enthält, die sogenannte **Verbindungsgerade** (P, Q). DIese Gerade lässt sich in Parameterdarstellung schreiben als

$$g = g(P, Q) = \vec{p} + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Diese Darstellung nennt man auch **Zweipunktform** der Geraden.

2.1.5 Beispiel (Beispiel zur Folgerung 2.1.4)

Gerade durch $P(-3, 3)$ und $Q(3, 0)$ ist

$$g = g(P, Q) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Dies ist die gleich Gerade wie in Aufgabe 2.1.2.

2.1.6 Bemerkung (Gerade als Lösungsmenge)

Im $\mathbb{R}^2$ kann jede Gerade parameterfrei als Lösungsmenge einer linearen Gleichung der Form

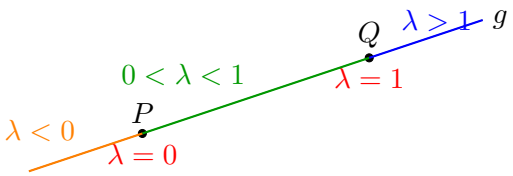
$$ax + by = c \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } (a, b) \neq (0, 0)$$

2.2 Strecken und Halbgeraden

Sei $g = g(P, Q)$ die Gerade durch zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^n$. Sei R ein weiterer Puntk auf g, d. h.

$$\vec{r} = \vec{p} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann beschreibt λ die Lage des Punktes R hinsichtlich P und Q.



2.2.1 Definition (Strecke, Länge einer Strecke)

Seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$. Die **Strecke** $\overline{PQ}$ ist die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^n$, die auf der Verbindungsgeraden von P und Q zwischen P und Q liegen. Die Strecke $\overline{PQ}$ kann dargestellt werden als

$$\overline{PQ} = \left\{ \vec{p} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \;\middle|\; \lambda \in [0, 1] \right\}$$

Die **Länge der Strecke** $\overline{PQ}$ wird mit $|\overline{PQ}|$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$|\overline{PQ}| = d(P, Q) = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$$

2.2.2 Bemerkung ()

- Es ist $\overline{PQ} = \overline{QP}$.
- Zwei Strecken sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Endpunten übereinstimmen, d. h.

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'} \iff (P = P' \;\wedge\; Q = Q') \;\vee\; (P = Q' \;\wedge\; Q = P')$$

2.2.3 Aufgabe

$P(-3, 3)$ und $Q(3, 0)$. Liegt $R(-1, 2)$ auf $\overline{PQ}$?

Ansatz: $\binom{-1}{2} = \binom{-3}{3} + \lambda \binom{6}{-3} \implies \begin{cases} -1 = -3 + 6\lambda & (1) \\ 2 = 3 - 3\lambda & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $\lambda = \frac{1}{3}$. Probe in (1): $-1 = -3 + 6 \cdot \frac{1}{3}$ ✓.

Da $\vec{r} = \vec{p} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ folgt: $R \in \overline{PQ}$.

Es sei $\mathbb{R}^+ := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\middle|\; \lambda \geq 0 \right\}$ und $\mathbb{R}^- := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\middle|\; \lambda \leq 0 \right\}$.

2.2.4 Definition (Halbgerade)

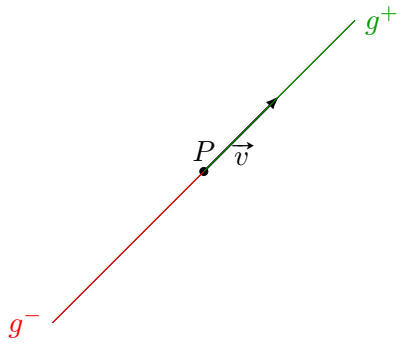
Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^n$, sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Die Menge

$$g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+ cdot\, \vec{v} = \left\{ \vec{p} + \lambda \vec{v} \;\middle|\; \lambda \geq 0 \right\}$$

nennt man **Halbgerade** mit Anfangspunkt P in Richtung $\vec{v}$.
Ist $Q \in g^+$ mit $P \neq Q$, so schreibe auch PQ^+ für die Halbgerade mit Anfangspunkt P in Richtung von $\overrightarrow{PQ}$.
Ist $g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+ \cdot \vec{v}$ eine Halbgerade ist, so ist

$$g^- := \vec{p} + \mathbb{R}^- \cdot \vec{v} = \left\{ \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} \;\middle|\; \lambda \leq 0 \right\}$$

eine Halbgerade mit Anfangspunkt P in Richtung $-\vec{v}$. Man nennt g^- die zu g^+ **komplementäre Halbgerade**.



2.3 Kollinearität, Lagebeziehungen zwischen Geraden

2.3.1 Definition (kollinear)

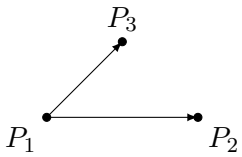
(a) Wir nennen Punkte $P_1, \ldots, P_k$ im $\mathbb{R}^n$ **kollinear**, wenn sie alle auf einer Geraden liegen.

(b) Seien $\vec{v}\,\vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Wir nennen $\vec{v}, \vec{w}$ kollinear, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, gibt mit $\vec{v} = \lambda \vec{w}$.

2.3.2 Bemerkung (kollinear)

Zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$ sind kollinear genau dann, wenn je zwei Verbindungsvektoren kollinear sind.





- Drei nicht-kollineare Punkte bilden ein (echtes) Dreieck.

- Zwei kollineare Vektoren nennt man auch „linear abhängig“.
- Zwei nicht-kollineare Vektoren spannen eine Ebene auf.

2.3.3 Satz ()

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

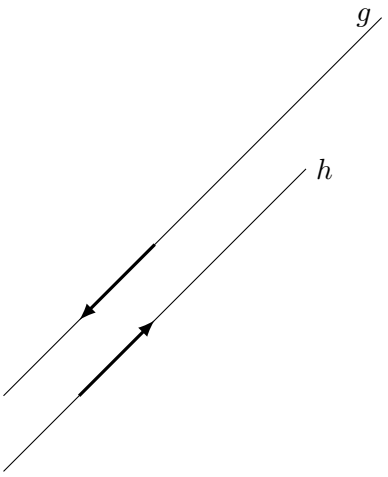
(a) $\vec{v}, \vec{w}$ sind genau dann kollinear, wenn $\underbrace{\mathbb{R}\vec{v}}_{=\vec{0}+\mathbb{R}\vec{v}} = \mathbb{R}\vec{w}$.

(b) $\vec{v}, \vec{w}$ sind genau dann nicht-kollinear, wenn aus $\mu\vec{v} = \nu\vec{w}$ folgt: $\mu = 0 = \nu$.

2.3.4 Definition (Geraden – parallel bzw. windschief)

Seien $g = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v}$, $h = \vec{q} + \mathbb{R}\vec{w}$ zwei geraden im $\mathbb{R}^n$.

(a) Wir nennen g und h **parallel** (schreibe $g \parallel h$), wenn die Richtungsvektoren kollinear sind.



(b) Sei $n \geq 3$. Die zwi Geraden g und h heißen **windschief**, wenn sie sich NICHT schneiden ($g \cap h = \emptyset$) und sie NICHT parallel sind.

Wir nenne zwei Geraden g, h **echt parallel**, wenn $g \neq h$ und $g \parallel h$.

2.3.5 Bemerkung ()

Im $\mathbb{R}^2$ können für Geraden g, h nur drei Fälle auftreten.

(1) $g = h$

(2) g und h echt parallel

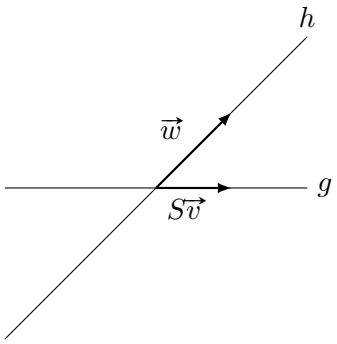
(3) g und h schneiden sich in genau einem Punkt.

Ist $n \geq 3$, so gibt es daneben auch noch windschiefe Geraden.

2.4 Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden

2.4.1 Definition (Winkel zwischen Geraden und Halbgeraden)

(a) Seien $g = \vec{p} + \mathbb{R}\vec{v}$ und $h = \vec{q} + \mathbb{R}\vec{w}$ zwei sich schneidende Geraden im $\mathbb{R}^n$.

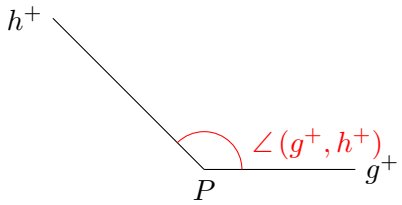


Der Winkel $\angle(g,h)$ zwischen den Geraden g und h wird definiert als

$$\angle(g,h) = \arccos\left(\frac{|\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}\right) \quad \in [0°, 90°]$$

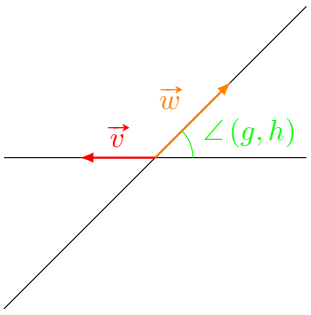
(b) Seien $g^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+\vec{v}$ und $h^+ = \vec{p} + \mathbb{R}^+\vec{w}$ zwei Halbgeraden im $\mathbb{R}^n$ mit Startpunkt P. Der Winkel zwischen den Halbgeraden g^+ und h^+ ist definiert als

$$\angle(g^+,h^+) = \angle(\vec{v},\vec{w}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}\right) \quad \in [0°, 180°]$$

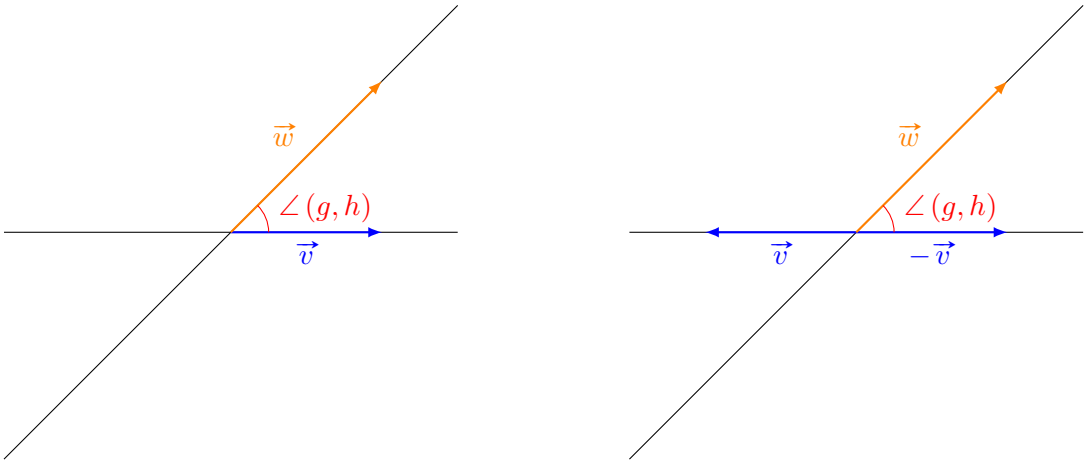


2.4.2 Bemerkung (Wohldefiniertheit des Winkels zwischen (Halb)Geraden)

(a) Der Winkel zwischen Geraden/Halbgeraden ist wohldefiniert, d. h. der Winkel hängt NICHT von der Parameterdarstellung ab.

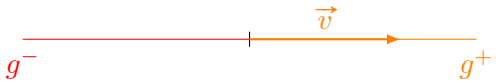


(b) Der Winkel zwischen Geraden ist immer ein spitzer oder rechter Winkel. Je nach Lage ist $\angle(g,h) = \angle(\vec{v},\vec{w})$ oder $\angle(g,h) = \angle(-\vec{v},\vec{w})$



(c) Für Winkel $\angle(g^+, h^+)$ nennt man die Halbgeraden auch Schenkel des Winkels.

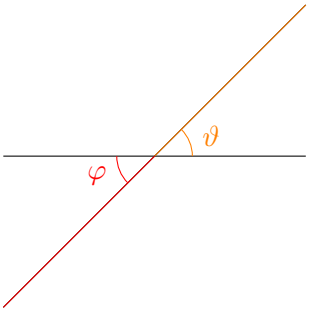
(d) Ist $g^+ = h^+$, so ist $\angle(g^+, h^+) = 0°$. Ist $h^+ = g^-$, so ist $\angle(g^-, h^+) = 180°$.



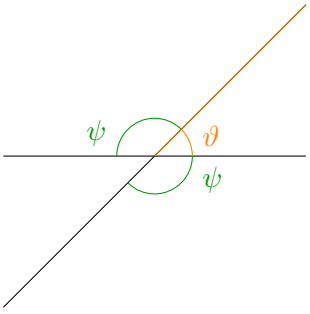
(e) Nach Definition 1.5.1 ist $\angle(Q, P, R) = \angle(PQ^+, PR^+)$

2.4.3 Definition (Scheitelwinkel, Nebenwinkel)

(a) Zwei Winkel ϑ und φ heißen **Scheitelwinkel**, wenn ihre Schenkel komplementäre Halbgeraden sind.



(b) Zwei Winkel ϑ und ψ heißen **Nebenwinkel**, wenn sie einen Schenkel gemeinsam haben und die beiden anderen Schenkel komplementäre Halbgeraden sind.



2.4.4 Satz (Nebenwinkel, Scheitelwinkel)

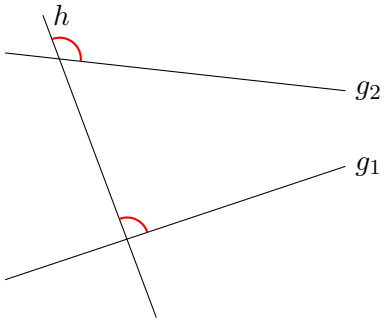
(a) Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

(b) Scheitelwinkel sind gleich groß.

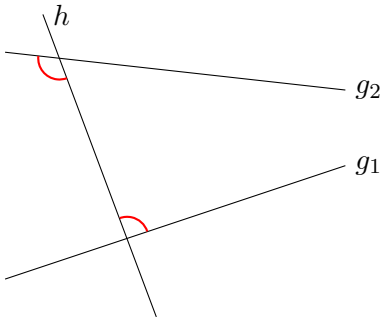
2.4.5 Definition (Stufenwinkel, Wechselwinkel)

Seien g_1, g_2 Geraden im $\mathbb{R}^2$, die von einer dritten Geraden h geschnitten werden.
Für die an den beiden Schnittpunkten von g_1 und h bzw. g_2 und h enstandenen Winkel führen wir folgende Bezeichnungen ein:

(a) Zwei Winkel heißen **Stufenwinkel** oder **F-Winkel**, wenn sie in derselben Halbebene bzgl. h liegen und ihre auf h liegenden Schenkel gleichgerichtet sind.



(b) Zwei Winkel heißen **Wechselwinkel** oder **Z-Winkel**, wenn sie in verschiedenen Halbebenen bzgl. h liegen und ihre auf h liegenden Schenkel entgegengerichtet sind.

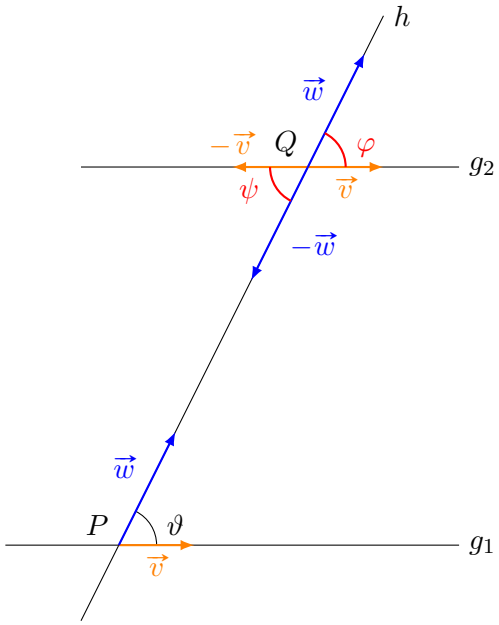


2.4.6 Satz ()

Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$, die von einer dritten Geraden h geschnitten werden. Ist $g_1 \parallel g_2$, so gilt:

(a) Stufenwinkel sind gleich groß.

(b) Wechselwinkel sind gleich groß.



III Strahlensatz und Folgerungen

3.1 Teilverhältnis

3.1.1 Definition ()

Seien P, Q, R, S Punkte im $\mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$ und $R \neq S$ und seien $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ kollinear. Dann ist das Teilverhältnis von $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ die reelle Zahl λ mit

$$\overrightarrow{RS} = \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Schreibe

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}$$

Beispiel

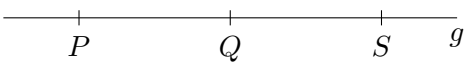
$\overrightarrow{PQ} = \binom{2}{-1}$; $\overrightarrow{RS} = \binom{6}{-3}$. Dann ist $3 \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. Dann folgt

$$\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}} = 3$$

3.1.2 Bemerkung ()

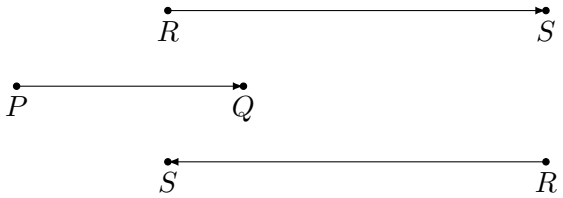
(a) $\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}$ ist nur eine Schreibweise. Der Quotient von Vektoren ist NICHT definiert!
Die Schreibweise $\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}$ impliziert bereits, dass die beiden Vektoren kollinear sind.

(b) Oft betrachtet man Teilverhältnisse für Punkte auf einer Geraden, z. B. $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{PQ}}$ für $P, Q, S \in g$.



(c) Der Absolutbetrag des Teilverhältnisses gibt das Längenverhältnis an:

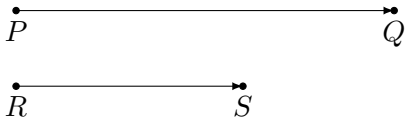
$$\left|\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{PQ}}\right| = \frac{\left\|\overrightarrow{RS}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{|\overline{RS}|}{|\overline{PQ}|}$$



Das Vorzeichen des Teilverhältnisses gibt an, ob die Vektoren gleich- oder entgegengerichtet sind.

(d) Rechenregeln:

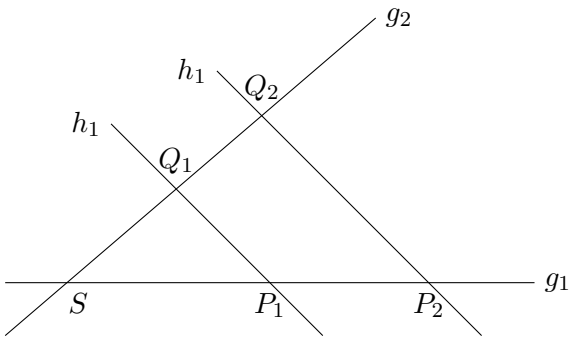
$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} \cdot \frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{TU}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{TU}} \quad (\text{„Kürzungsregel“})$$
$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} = -\frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{RS}} = -\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{SR}} = \frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{SR}}$$



3.2 Strahlensatz

3.2.1 Satz (Strahlensatz)

Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$, die sich im Punkt S schneiden. Seien h_1, h_2 zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{R}^2$, die NICHT durch S gehen sollen.



Sei $g_1 \cap h_1 = \{P_1\}$, $g_1 \cap h_2 = \{P_2\}$, $g_2 \cap h_1 = \{Q_1\}$, $g_2 \cap h_2 = \{Q_2\}$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

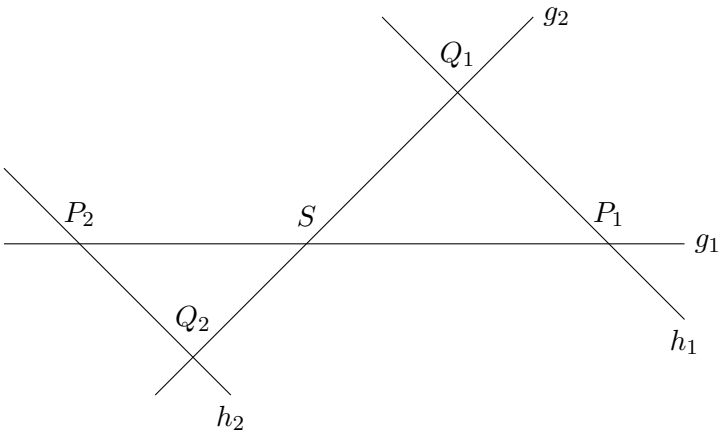
(a) $\frac{\overrightarrow{SP_1}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{\overrightarrow{SQ_1}}{\overrightarrow{SQ_2}}$

(b) $h_1 \parallel h_2$

In diesem Fall gilt:

$$\frac{\overrightarrow{SP_1}}{\overrightarrow{SP_2}} = \frac{\overrightarrow{SQ_1}}{\overrightarrow{SQ_2}} = \frac{\overrightarrow{P_1Q_1}}{\overrightarrow{P_2Q_2}}$$

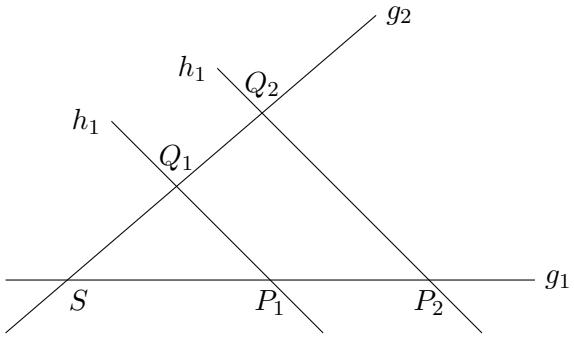
Auch möglich ist der folgende Fall:



3.2.2 Bemerkung ()

Ist $h_1 \parallel h_2$, so gilt nicht nur die Gleichheit der in Satz 3.2.1 betrachteten Teilverhältnisse, sondern es gilt allgemeiner:
Je zwei Abschnitte auf einer Geraden verhalten sich so zueinander, wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

Beispiel



$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{SP_1}} = \frac{\overrightarrow{Q_1Q_2}}{\overrightarrow{SQ_1}}$$

Sind NICHT die orientierten Teilverhältnisse bekannt, sondern nur die Streckenverhältnisse, so bleiben die Aussagen von Satz 3.2.1 nur teilweise erhalten.

3.2.3 Satz (Strahlensatz, nicht-orientiert)

Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit $g_1 \cap g_2 = \{S\}$.
Seien $h_1, h_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit $h_1 \neq h_2$, $h_1 \parallel h_2$; $S \notin h_1, h_2$.
Sei $g_1 \cap h_1 = \{P_1\}$, $g_1 \cap h_2 = \{P_2\}$, $g_2 \cap h_1 = \{Q_1\}$, $g_2 \cap h_2 = \{Q_2\}$.

Dann gilt:

$$\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} = \frac{|\overline{SQ_2}|}{|\overline{SQ_1}|} = \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$$

3.2.4 Satz (Umkehrung des Strahlensatzes im nicht-orientierten Fall)

Seien $g_1, g_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit Schnittpunkt S.
Seien $h_1, h_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden mit $S \notin h_1, h_2$. Seien P_1, P_2, Q_1, Q_2 wie oben.
Es gelte

$$\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} = \frac{|\overline{SQ_2}|}{|\overline{SQ_1}|} = \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$$

Dann gilt entweder

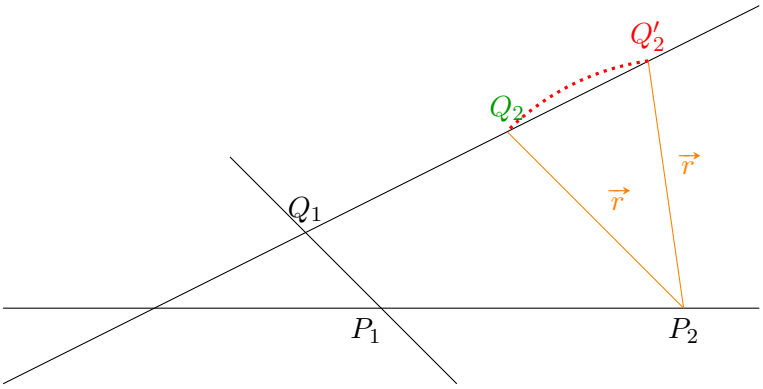
(a) $h_1 \parallel h_2$

ODER

(b) $h_1 \nparallel h_2$, $g_1 \perp g_2$ und S liegt zwischen P_1 und P_2 oder zwischen Q_1 und Q_2.

3.2.5 Bemerkung ()

- Bei Satz 3.2.4 kann man den Fall 2 ausschließen, indem man zusätzliche Bedingungen formuliert, z. B. dass alle Punkte auf einer Seite bzgl. S liegen sollen, oder dass $g_1 \not\perp g_2$.
- Aus der Gleichheit $\frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} = \frac{|\overline{P_2Q_2}|}{|\overline{P_1Q_1}|}$ folgt NICHT, dass $h_1 \parallel h_2$.



$|\overline{P_2Q_2}| = \frac{|\overline{SP_2}|}{|\overline{SP_1}|} \cdot |\overline{P_1Q_1}| =: r$

3.3 Folgerungen aus Strahlensatz

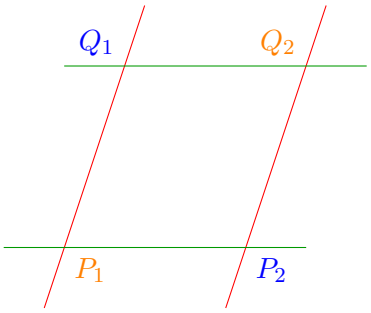
3.3.1 Lemma (Parallelogrammlemma)

Seien P_1, P_2, Q_1, Q_2 vier Punkte im $\mathbb{R}^2$. Dann sind äquivalent:

(a) $P_1 + Q_2 = P_2 + Q_1$

(b) $g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2)$ und $g(P_1, Q_1) \parallel g(P_2, Q_2)$ (d. h. P_1, P_2, Q_1, Q_2 sind Eckpunkte eines Parallelogramms)

Skizze:



3.3.2 Satz (Satz von Pappos)

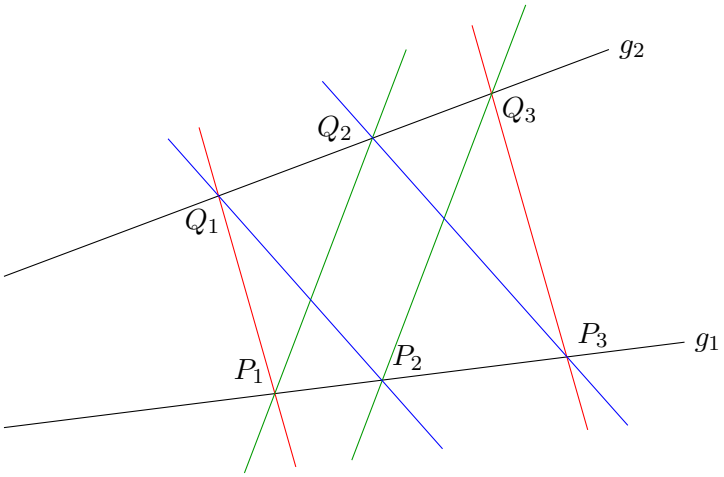
Seien g_1, g_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$. Seien P_1, P_2, P_3 drei verschiedene Punkte auf g_1 und Q_1, Q_2, Q_3 drei verschiedene Punkte auf g_2 mit

$$g(P_1, Q_2) \parallel g(P_2, Q_3) \quad \wedge \quad g(P_2, Q_1) \parallel g(P_3, Q_2)$$

Dann gilt:

$$g(P_1, Q_1) \parallel g(P_3, Q_3)$$

Skizze:



3.3.3 Satz (Satz von Desargues)

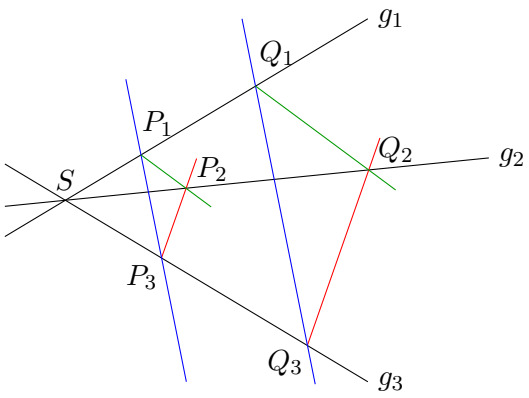
Seien g_1, g_2, g_3 drei Geraden im $\mathbb{R}^2$, die sich in einem Punkt S schneiden.
Seien $P_1, Q_1 \in g_1$, $P_2, Q_2 \in g_2$, $P_3, Q_3 \in g_3$ mit

$$g(P_1, P_2) \parallel g(Q_1, Q_2) \quad \wedge \quad g(P_1, P_3) \parallel \ g(Q_1, Q_3)$$

Dann gilt

$$g(P_2, P_3) \parallel g(Q_2, Q_3)$$

Skizze:

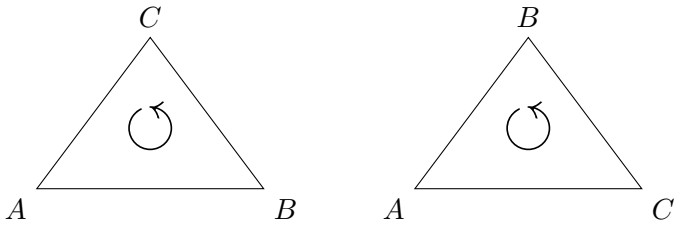


IV Dreiecke

4.1 Erste Dreiecksbetrachtungungen

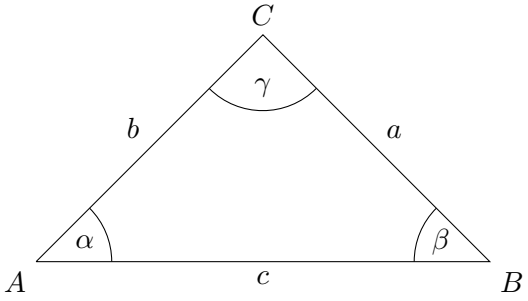
4.1.1 Definition ()

Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte im $\mathbb{R}^2$. Das Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und Orientierung gegen den Uhrzeigersinn bezeichnen wir mit $\triangle(A, B, C)$.



Bezeichnungen im $\triangle(A, B, C)$:

- $a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, $b = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$, $c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
- $\alpha = \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $\gamma = \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$



Da $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck, folgt: $0° \lneqq \alpha, \beta, \gamma \lneqq 180°$

4.1.2 Satz ()

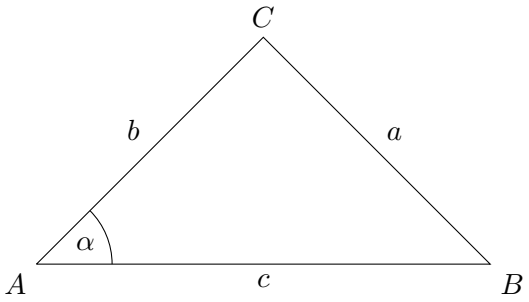
Die Seitenlängen eines Dreiecks erfüllen

$$a < b + c \ , \ b < a + c \ , \ c < a + b$$

4.1.3 Satz (Cosinussatz für Dreiecke)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$



Löst man obige Formeln nach $\cos(\alpha)/\cos(\beta)/\cos(\gamma)$ auf, so erhält man:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4.1.4 Satz (Sinussatz)

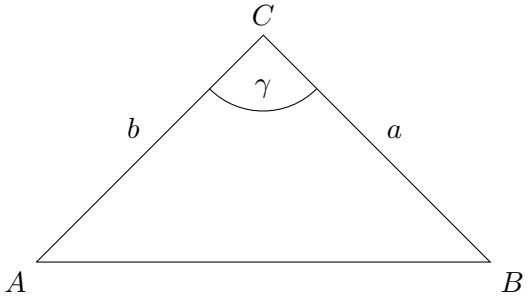
Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gilt:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

4.1.5 Definition ()

Der Flächeninhalt Δ eines Dreiecks $\triangle(A, B, C)$ ist definiert als

$$\Delta := \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$



Nach Sinussatz ist

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

also ist

$$b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\beta) \tag{IV.1}$$

und

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

also ist

$$a \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \sin(\alpha) \tag{IV.2}$$

Es folgt:

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) \overset{\text{IV.1}}{=} \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) \overset{\text{IV.2}}{=} \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$

Damit st der Flächeninhalt wohldefiniert (d. h. hängt NICHT von den Bezeichnungen im Dreieck ab).

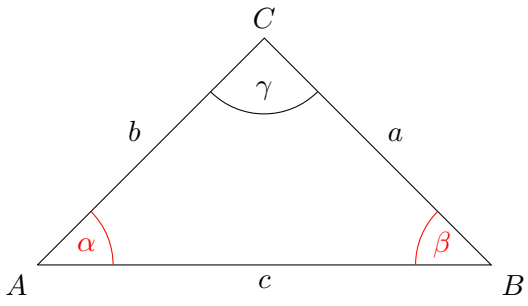
4.1.6 Satz (Formel von Heron)

Sei $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang des Dreiecks $\triangle(A,B,C)$. Dann gilt:

$$\Delta = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$$

4.1.7 Definition ()

(a) Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei Seiten die gleiche Länge haben. Diese Seiten nennt man **Schenkel** des Dreiecks, die andere Seite **Basis**.



(b) Ein Dreieck heißt **gleichseitig**, wenn alle drei Seiten die gleiche Länge haben.

4.1.8 Satz ()

(a) Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei seiner Innenwinkel übereinstimmen.

(b) Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Innenwinkel übereinstimmen.

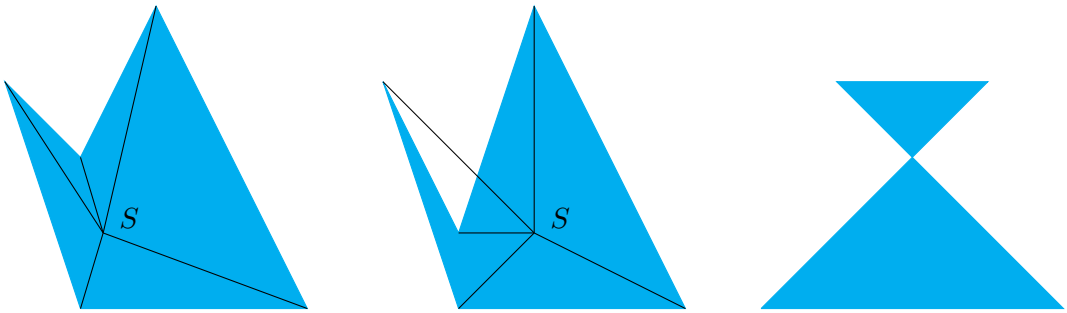
4.2 Winkelsumme und Außenwinkel

4.2.1 Satz ()

Im Dreieck $\triangle(A, B, C)$ gilt

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Ein Polygon, in dessen Inneren es einen Punkt S gibt, sodass die Verbindungsstrecke von S zu jedem Eckpunkt ganz im Inneren des Polygons liegt, nennen wir **konvex**.



konvex NICHT konvex NICHT konvex

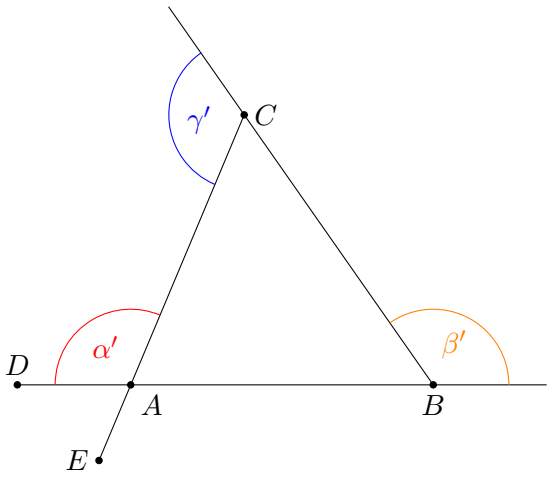
4.2.2 Satz (Winkelsumme Polygon)

Die Summe der Innenwinkel eines konvexen Polygons im $\mathbb{R}^2$ mit n Ecken (für $n \geq 3$) beträgt

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

4.2.3 Definition ()

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Sei $D \in g(A, B)$, sodass $A \in \overline{DB}$.



Der Außenwinkel α' an A ist definiert als

$$\alpha' = \angle(C, A, D)$$

Analog definiere β' und γ'.
Bemerkung: Wählt man $E \in g(A, C)$ mit $A \in \overline{EC}$, so wird über $\alpha'' = \angle(E, A, B)$ auch ein Außenwinkel definiert; nach Satz 2.4.4 gilt aber: $\alpha' = \alpha''$.

Da α und α' Nebenwinkel sind, gilt nach Satz 2.4.4: $\alpha + \alpha' = 180°$
Mit Satz 4.2.1 gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $\alpha' = \beta + \gamma$
Wir haben also gezeigt:

4.2.4 Satz (starker Außenwinkelsatz)

Jeder Außenwinkel eines Dreiecks stimmt mit der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel überein.

4.2.5 Korollar (schwacher Außenwinkelsatz)

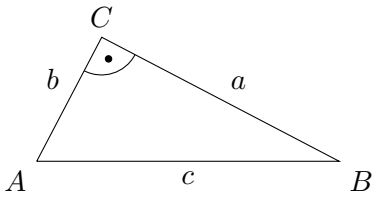
Jeder Innenwinkel eines Dreiecks ist echt kleiner als jeder nichtanliegende Außenwinkel.

4.2.6 Satz (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes)

Es seien g_1, g_2 zwei verschiedene Geraden, die von einer dritten Geraden h geschnitten werden. Seien ϑ, ψ Wechselwinkel an den Geraden g_1, g_2. Ist $\vartheta = \psi$, so sind g_1 und g_2 parallel.
Bemerkung: Gilt für Stufenwinkel ϑ, φ an beliebigen Geraden g_1, g_2, h, dass $\vartheta = \varphi$, so folgt ebenfalls, dass $g_1 \parallel g_2$.

4.3 Rechtwinklige Dreiecke

4.3.1 Definition ()



Ein Dreieck heißt **rechtwinklig**, wenn einer der Innenwinkel ein rechter Winkel ist. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse**, die beiden anderen Seiten heißen **Katheten**.

4.3.2 Satz (Satz des Pythagoras)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann ist das Dreieck rechtwinklig mit $\gamma = 90°$ genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$.
Ist $\triangle(A, B, C)$ rechtwinklig mit $\gamma = 90°$, so folgt mit Satz 4.2.1:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Daher gilt auch

$$0° \lneq \alpha, \beta \lneq 90°$$

4.3.3 Proposition ()

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$. Dann gilt

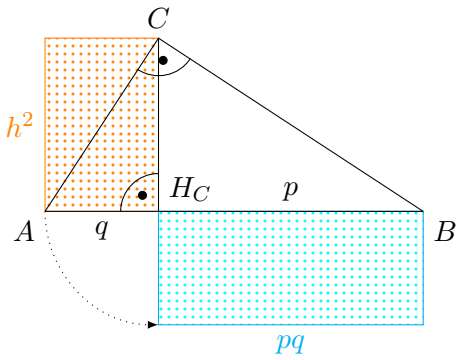
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$
$$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}$$
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$
$$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Merkregel: $\cos = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\sin = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

4.3.4 Satz (Höhensatz)

Sei $\triangle(A, B, C)$ rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$.
Sei H_C der Höhenfußpunkt der Höhe durch C. Sei $h = |\overline{CH_C}|$; $p = |\overline{AH_C}|$; $q = |\overline{H_CB}|$. Dann gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$



4.3.5 Satz (Kathetensatz)

Voraussetzungen siehe Satz 4.3.4. Dann gilt:

$$a^2 = c \cdot q \quad , \quad b^2 = c \cdot p$$

4.4 Kongruente und ähnliche Dreiecke

4.4.1 Satz (Kongruenzsatz)

Seien $\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(A', B', C')$ zwei Dreiecke. Dann sind äquivalent:

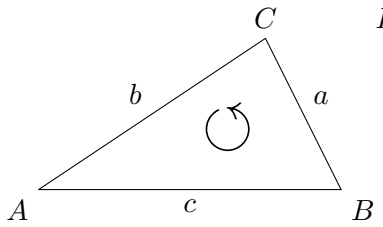
(a) Die beiden Dreiecke stimmen in allen drei Seiten überein (SSS).

(b) Die Dreiecke stimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein (SWS).

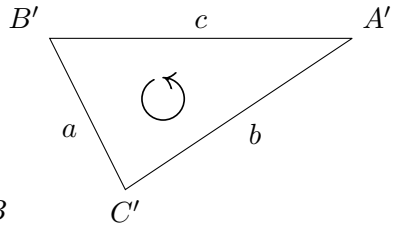
(c) Die Dreiecke stimmen in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel überein (SsW).

(d) Die Dreiecke stimmen in einer Seitenlänge und zwei entsprechenden Winkeln überein (WSW).

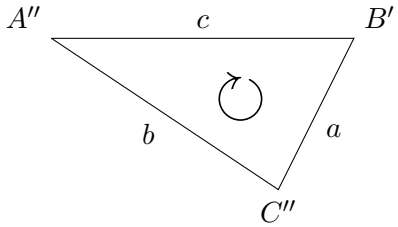
Wir nennen diese Dreiecke **kongruent**.
Bemerkung: Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn es eine längen- und winkelerhaltende Abbildung (Isometrie) gibt, die ein Dreieck auf das andere überführt. Diese Abbildungen lassen sich als Verknüpfungen von Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen schreiben. Wir nennen kongruente Dreiecke auch **deckungsgleich**.



$\triangle(A, B, C)$



$\triangle(A', B', C')$



$\triangle(A'', C'', B'')$

$\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(A', B', C')$ sind gleichsinnig kongruent.
$\triangle(A', B', C')$ und $\triangle(A'', B'', C'')$ sind gegensinnig kongruent.

Wir wollen meist, dass die Orientierung erhalten bleibt, daher bedeutet kongreunt bei uns (fast immer) „gleichsinnig kongruent“.

4.4.2 Satz (Ähnlichkeit)

Seien $\triangle(A, B, C)$ und $\triangle(A', B', C')$ zwei Dreiecke. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

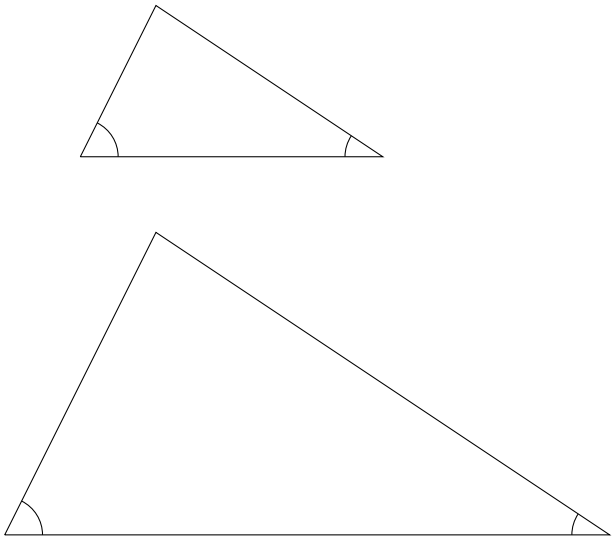
(a) Die Dreiecke stimmen in den Verhältnissen der Seitenlängen überein.

(b) Die Dreiecke stimmen in den Verhältnissen zweier Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel überein.

(c) Die Dreiecke stimmen in den Verhältnissen zweier Seitenlängen der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel überein.

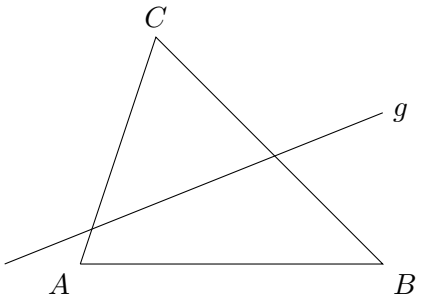
(d) Die Dreiecke stimmen in zwei Winkeln überein.

Wir nennen diese Dreiecke dann **ähnlich**.
Bemerkung: Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn es eine Abbildung (sogenannte Ähnlichkeitsabbildung) gibt, die Winkelgrößen und Streckenverhältnisse unverändert lässt (Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen sowie Streckungen/Stauchungen).

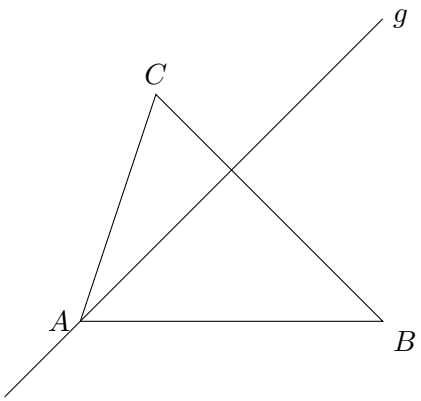


4.5 Satz von Ceva, Satz von Menelaos

Wir nennen eine Gerade, die quer durch ein Dreieck geht, **Transversale**.



Geht diese Gerade durch einen Eckpunkt, so nennen wir sie **Ecktransversale**.



Der Satz von Ceva liefert uns ein Kriterium, wann sich Ecktransversalen in einem Punkt schneiden. Dies werden wir später benutzen, um zu zeigen, dass sich die Seitenverhältnisse, Winkelhalbierenden etc. in einem Punkt schneiden.

4.5.1 Satz (Satz von Ceva)

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle(A, B, C)$ und Punkte $C_1 \in g(A, B)$, $B_1 \in g(A, C)$ und $A_1 \in g(B, C)$. Die Punkte A_1, B_1, C_1 seien KEINE Eckpunkte von $\triangle(A, B, C)$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $g(A, A_1)$, $g(B, B_1)$ und $g(C, C_1)$ schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel.

(b) $\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$

4.5.2 Bemerkung (Satz von Ceva)

Liegen A_1, B_1, C_1 innerhalb der Dreiecksseiten, so kann die Parallelität ausgeschlossen werden. In diesem Fall gilt also:

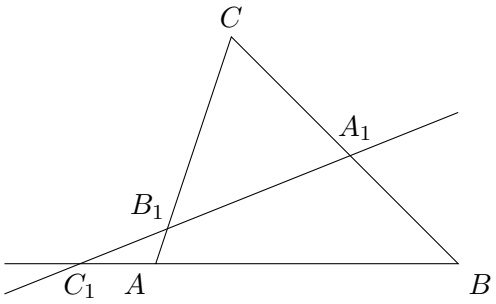
$$g(A, A_1), g(B, B_1), g(C, C_1) \text{ schneiden sich in einem Punkt } \iff \frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$$

4.5.3 Satz (Satz von Menelaos)

Voraussetzungen siehe Satz von Ceva, d. h. $\triangle(A, B, C)$, Punkte A_1, B_1, C_1 auf Verlängerungen der Dreiecksseiten.
Dann gilt:

$$A_1, B_1, C_1 \text{ kollinear } \iff \frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_1B}}{\overrightarrow{C_1A}} = +1$$

Skizze:



4.6 Schnittpunkte im Dreieck

(a) Schwerpunkt eines Dreiecks

4.6.1 Satz ()

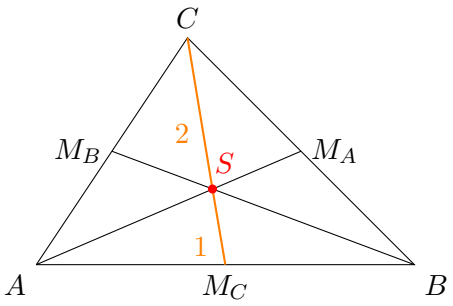
Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck mit Seitenmittelpunkten

$$M_A = \frac{1}{2}(B + C) \ , \ M_B = \frac{1}{2}(A + C) \ , \ M_C = \frac{1}{2}(A + B)$$

Die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S. Dieser ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

und wird **Schwerpunkt** des Dreiecks genannt. Der Puntk S teilt $\overline{CM_C}$ im Verhältnis 2 : 1; analog für $\overline{AM_A}$ und $\overline{BM_B}$.



(b) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Sei W_C der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit der Geraden $g(A,B)$. Analog definiere W_A und W_B.

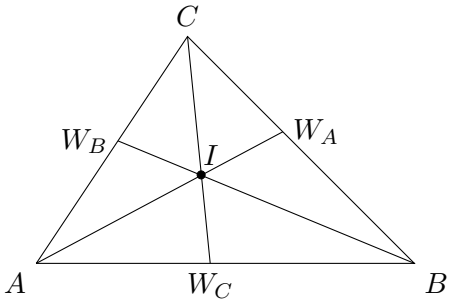
4.6.2 Lemma ()

Sei $\triangle(A,B,C)$ ein Dreieck. Jede Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten:

$$\frac{\overrightarrow{W_AC}}{\overrightarrow{W_AB}} = -\frac{b}{c}\,,\quad \frac{\overrightarrow{W_BA}}{\overrightarrow{W_BC}} = -\frac{c}{a}\,,\quad \frac{\overrightarrow{W_CB}}{\overrightarrow{W_CA}} = -\frac{a}{b}$$

4.6.3 Satz ()

Sei $\triangle(A,B,C)$ ein beliebiges Dreieck. Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt I. Der Punkt I ist gleichweit von jeder Seite entfernt.



4.6.4 Bemerkung ()

Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist gerade der Inkreismittelpunkt; mehr dazu im Kapitel V.

(c) Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

4.6.5 Satz ()

Sei $\triangle(A,B,C)$ ein Dreieck. Die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt U. Dieser ist gleichweit von jedem Eckpunkt entfernt, d. h.

$$d(U,A) = d(U,B) = d(U,C)$$

4.6.6 Bemerkung ()

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Umkreismittelpunkt, siehe Kapitel V.

4.6.7 Lemma ()

Der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten stimmt genau dann mit dem Schwerpuntk überein, wenn $\triangle(A, B, C)$ gleichschenklig.

(d) Höhenschnittpunkt

4.6.8 Satz ()

Gegeben sei ein Dreieck $\triangle(A, B, C)$. Dann schneiden sich die drei Höhen in einem gemeinsamen Punkt H. Dieser Punkt erfüllt die Gleichung

$$2\overrightarrow{US} = \overrightarrow{SH}$$

Eulergerade: Gerade durch U, S, H.

Ist $\triangle(A, B, C)$ spitzwinklig, so liegt H im Inneren des Dreiecks, ist $\triangle(A, B, C)$ stumpfwinklig, so liegt H außerhalb; ist $\triangle(A, B, C)$ rechtwinklig, so stimmt H mit dem Eckpunkt überein, an dem der rechte Winkel liegt.

Die Längen der Höhenabschnitte $h_a = |\overline{AH_A}|$, $h_b = \overline{BH_B}|$ und $h_c = |\overline{CH_C}|$ lassen sich über die Größen des Dreiecks berechnen:

4.6.9 Lemma ()

Für die Längen h_a, h_b, h_c der Höhenabschitte gilt:

$$h_a = c \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\gamma) \quad ; \quad h_b = c \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\gamma) \quad ; \quad h_c = a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$$

Mithilfe der Höhenabschnitte lässt sich der Flächeninhalt $\triangle$ berechnen als:

$$\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

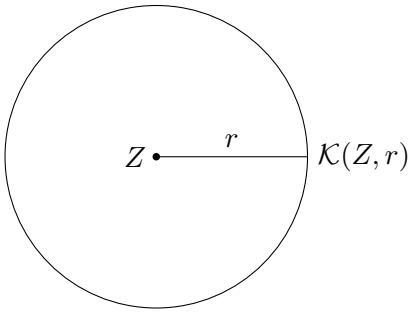
V Der Kreis

5.1 Mittelpunktsgleichung, Sekante und Tangente

5.1.1 Definition ()

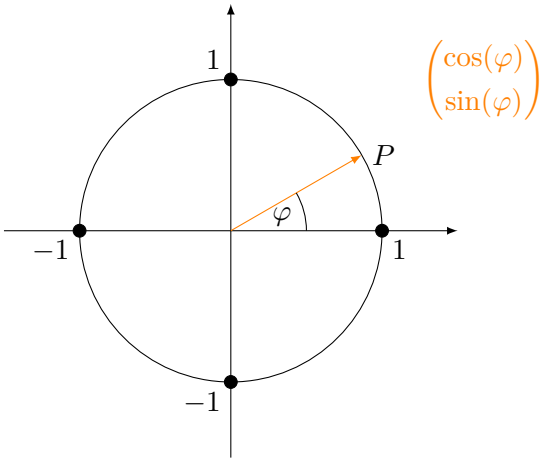
Sei $Z \in \mathbb{R}^2$, sei $r > 0$. Ein **Kreis** $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ mit Mittelpunkt Z und Radius r ist der geometrische Ort aller Punkte P im $\mathbb{R}^2$, die von Z den Abstand r haben,

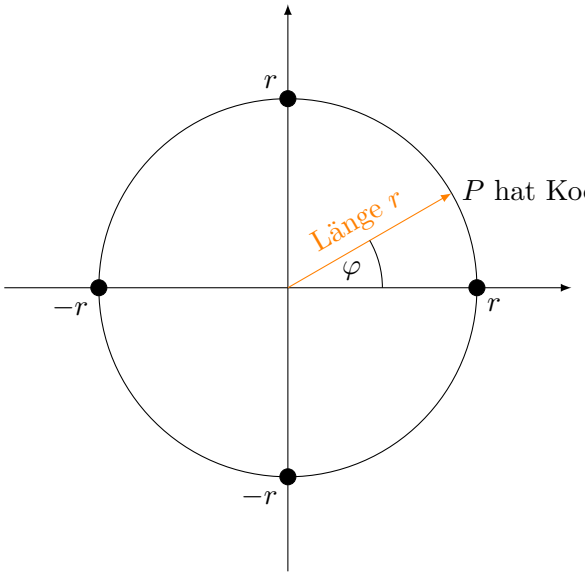
$$\mathcal{K}(Z, r) = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; d(Z, P) = r \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



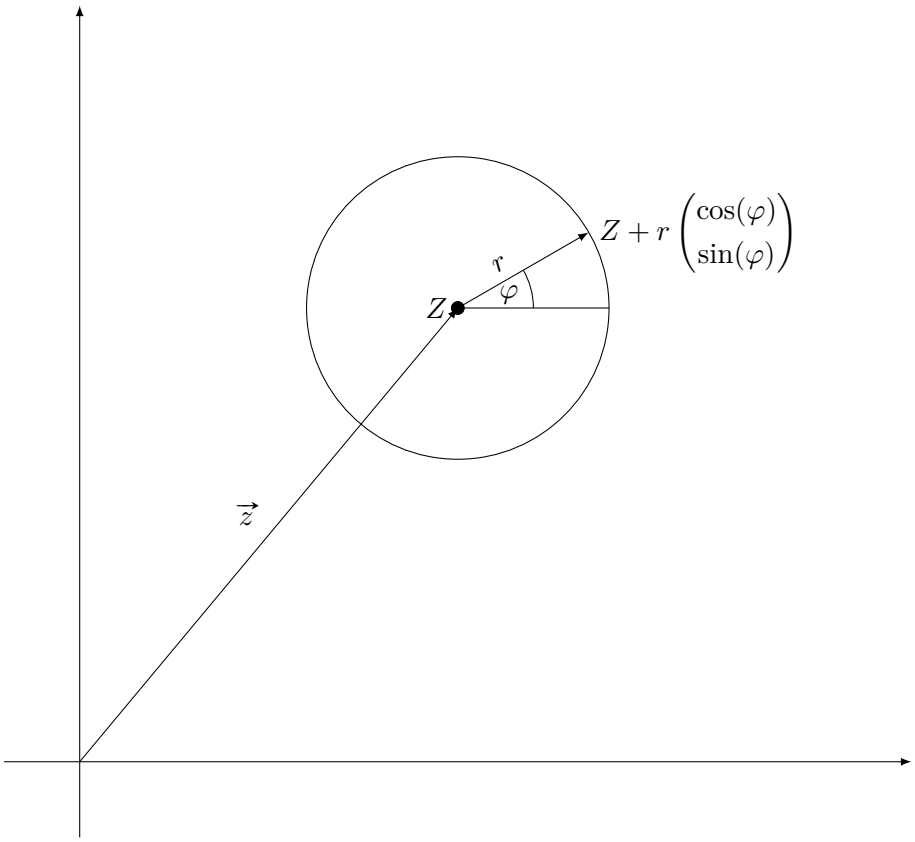
Alternativ: Parameterdarstellung:

$$\mathcal{K}(Z,r) = \left\{ Z + r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq \varphi < 360^\circ \right\}$$



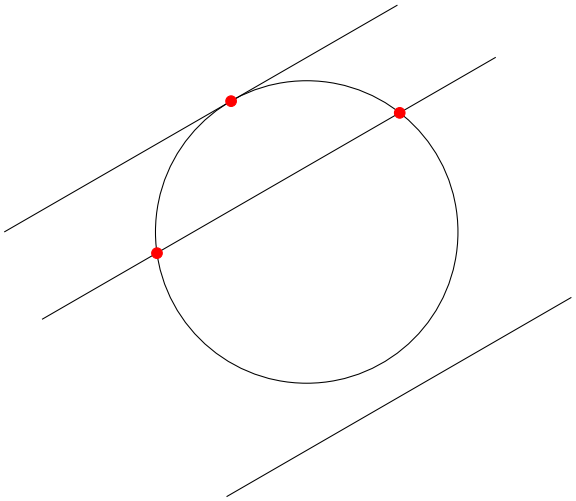


P hat Koordinatenvektor $r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$



5.1.2 Satz ()

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ ein Kreis und g Gerade im $\mathbb{R}^2$. Dann besetht der Durchschnitt $\mathcal{K} \cap g$ aus maximal zwei Punkten.



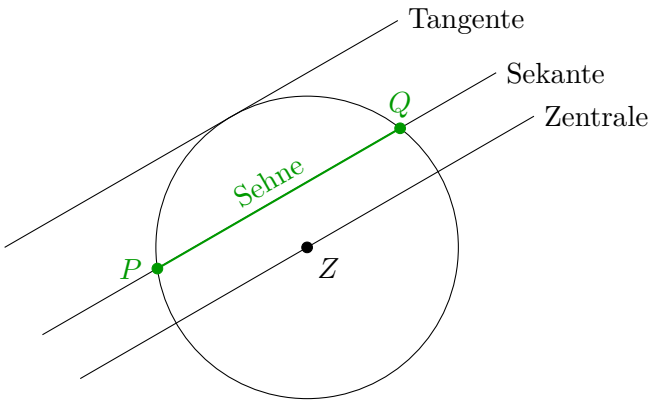
5.1.3 Definition ()

Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ ein Kreis. Eine Gerade g heißt

(a) **Sekante**, wenn $\mathcal{K} \cap g$ aus genau zwei Punkten besteht.

(b) **Zentrale**, wenn g Sekante druch Z ist.

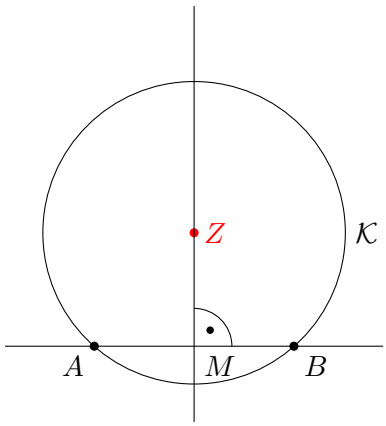
(c) **Tangente**, wenn $\mathcal{K} \cap g$ aus genau einem Punkt besteht.



Ist q Sekante mit $g \cap \mathcal{K} = \{P, Q\}$, so nennen wir $\overline{PQ}$ **Sehne** des Kreises.

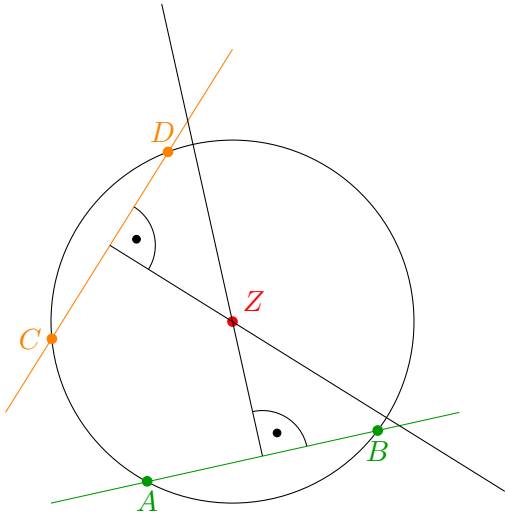
5.1.4 Satz (Sekantensatz)

Sei g Sekante zu $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ und $g \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$. Dann liegt Z auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$.



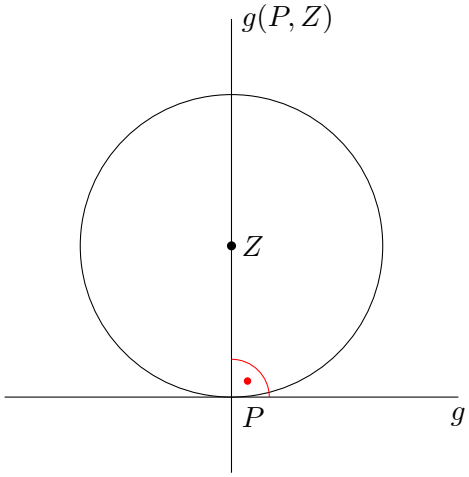
5.1.5 Bemerkung (Anwendung: Bestimmung des Mittelpunkts eines Kreises)

Soll der Mittelpunkt eines Kreises bestimmt werden, so wähle zwei (beliebige) Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und konstruiere die Mittelsenkrechten zu den Sehnen. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist dann der Kreismittelpunkt.



5.1.6 Satz (Tangentensatz)

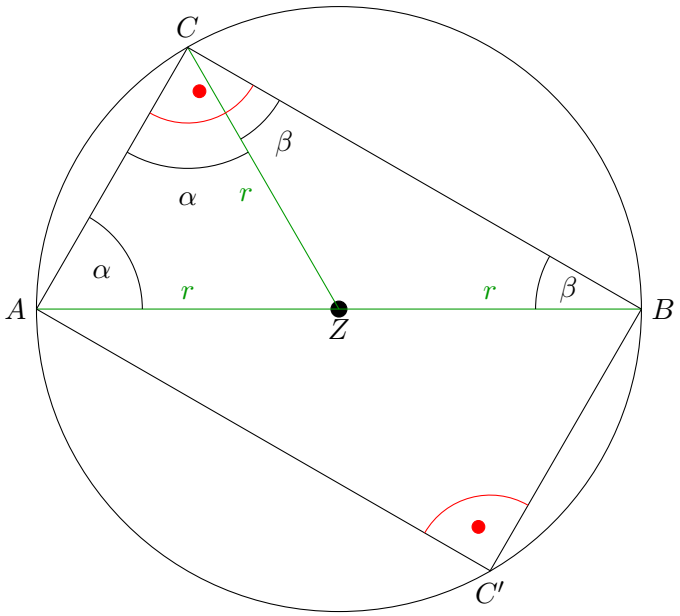
Sei g Tangente an $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ mit $\mathcal{K} \cap g = \{P\}$. Dann ist $g \perp g(P, Z)$.



5.2 Winkel im Kreis

5.2.1 Satz (Satz des Thales)

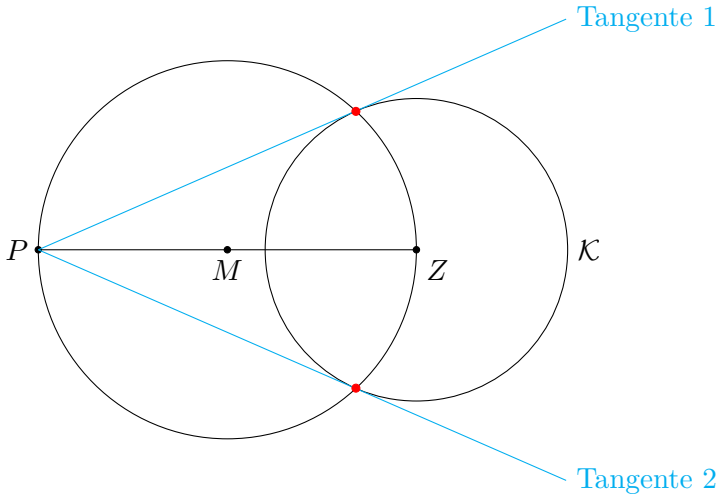
Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ ein Kreis, sei g Zentrale zu $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} \cap g = \{A, B\}$. Sei $C \in \mathcal{K} \setminus \{A, B\}$. Dann ist $\triangle(A, B, C)$ bzw. $\triangle(A, C, B)$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C.



Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung des Satzes (*siehe Übungen*).

5.2.2 Bemerkung (Anwendung: Tangentenkonstruktion)

Gegeben sei ein Kreis $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Z, r)$ und ein Punkt P außerhalb des Kreises.

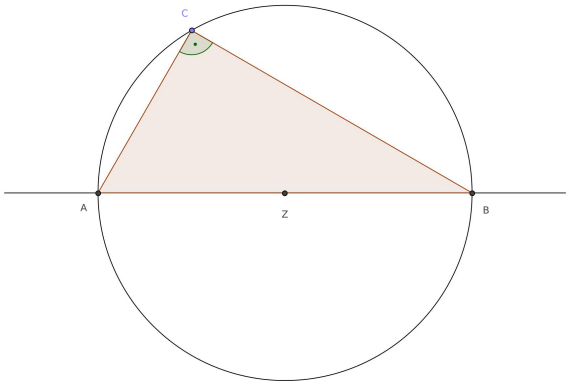


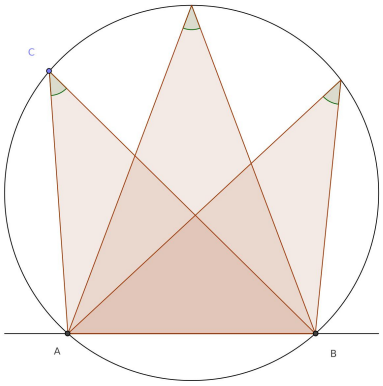
Will man eine Tangente zu $\mathcal{K}$ durch P konstruieren, so geht man wie folgt vor:

(a) Bestimme Mittelpunkt M von $\overline{PZ}$

(b) Zeichne Kreis zum Mittelpunkt M und Radius $R = \frac{|\overline{PZ}|}{2}$

(c) Die Schnittpunkte des Thaleskreis mit $\mathcal{K}$ sind die Berührpunkte der Tangente durch P.





5.2.3 Definition ()

Seien A, B zwei Punkte auf einem Kreis $\mathcal{K}$.

(a) Ist $C \in \mathcal{K}$, $C \notin \overline{AB}$, dann nennt man den Winkel $\sphericalangle(A, C, B)$ bzw. $\sphericalangle(B, C, A)$ bei C **Peripheriewinkel** oder **Umfangswinkel**.

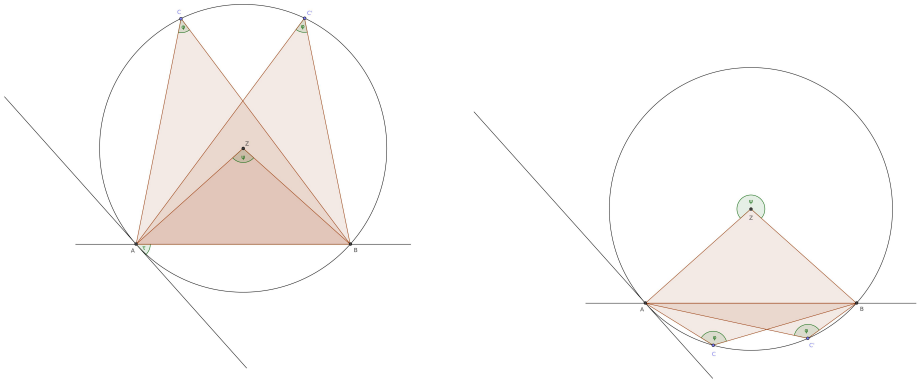
(b) Der Winkel $\sphericalangle(A, Z, B)$ bzw. $\sphericalangle(B, Z, A)$ beim Mittelpunkt Z des Kreises $\mathcal{K}$ heißt **Zentriwinkel** oder **Mittelpunktswinkel**.

5.2.4 Satz (Satz über Peripheriewinkel)

(a) Alle Peripheriewinkel über demselben Kreisboge sind gleich groß.

(b) Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

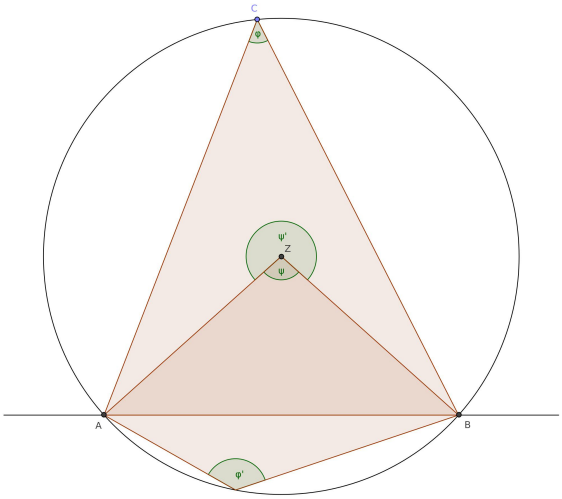
(c) Der Peripheriewinkel ist ebenso groß wie der zugehörige Sehnentangentenwinkel.



$$\psi = 2\varphi$$

5.2.5 Wiederholung ()

Peripheriewinkel auf unterschiedlichen Kreisbögen ergänzen sich zu 180°.

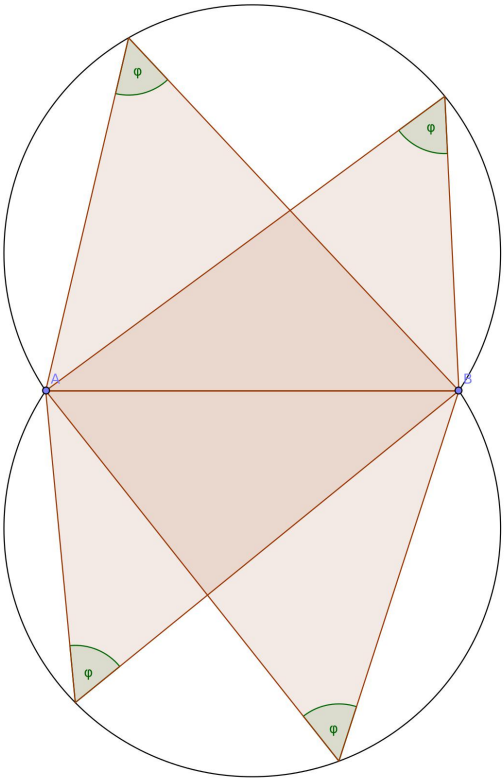


$$\varphi + \varphi' = 180°$$

5.2.6 Bemerkung ()

(a) Es gilt auch die Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes: Ist $\sphericalangle(B, C, A) = \varphi$, so liegt C auf dem Kreisbogen zum Peripheriewinkel φ über $\overline{AB}$. Diesen Kreisbogen nennt man auch **Fasskreisbogen**.

(b) Ist $\overline{AB}$ eine gegebene Strecke, so ist die Ortslinie aller Punkte, die mit $\overline{AB}$ einen gegebene Winkel $\varphi \in]0°, 180°[$ einschließen, gegeben durch zwei Kreisbogenpaare.



Konstruktion für den Fall $0° < \varphi < 90°$:
Der Mittelpunkt Z des Kreises ergibt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ mit dem freien Schenkel des an A angetragenen Winkels der Größe $\alpha = 90° - \varphi$.
Der Winkel α kann konstruiert werden, indem man an $\overline{AB}$ den Winkel φ anzeichnet und das Lot durch A zum freien Winkelschenkel errichtet.

BILD folgende Konstruktion durchführen

1. Schritt: Mittelsenkrechte
2. Schritt: Zeichne φ an, errichte Lot

$\longrightarrow$ Schnittpunkt ist Z.

Ist $90° < \varphi < 180°$, so wähle $\alpha = \varphi - 90°$.

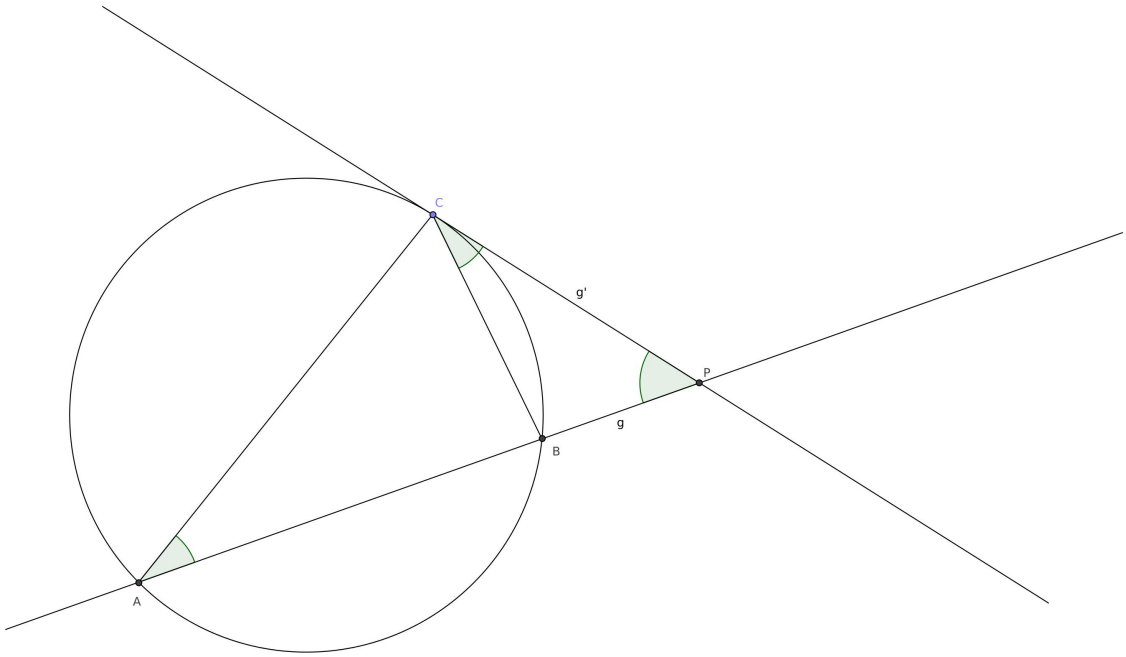
BILD auch hierfür Konstruktion durchführen

5.3 Streckenverhältnisse am geschnittenen Kreis

5.3.1 Satz (Sekanten-Tangenten-Satz)

Sei g Sekante zum Kreis $\mathcal{K}$ mit $\mathcal{K} \cap g = \{A, B\}$. Sei g' Tangente durch $C \in \mathcal{K}$ mit $C \neq A, B$. Sei $g \nparallel g'$. Sei $\{P\} = g \cap g'$. Dann gilt:

$$|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{CP}|^2$$



5.3.2 Satz (Sekantensatz)

Seien g, g' zwei sich im Punkt P schneidende Sekanten, wobei P außerhalb des Kreises $\mathcal{K}$ liege. Sei $g \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$ und $g' \cap \mathcal{K} = \{A', B'\}$. Dann gilt:

$$|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{A'P}| \cdot |\overline{B'P}|$$

Das Produkt der Sekantenabschnitte ist unabhängig von der Sekante.

5.3.3 Satz (Sehnensatz)

Seien g, g' zwei sich im Punkt P schneidende Sekanten, wobei P innerhalb es Kreises $\mathcal{K}$ liegen soll. Sei $g \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$ und $g' \cap \mathcal{K} = \{A, B\}$. Dann gilt:

$$|\overline{AP}| \cdot |\overline{BP}| = |\overline{A'P}| \cdot |\overline{B'P}|$$

5.3.4 Satz (Tangentensatz)

Seien g, g' zwei sich im Punkt P schneidende Tangenten an $\mathcal{K}$ mit Kreisschnittpunkten C bzw. C'. Dann ist $|\overline{CP}| = |\overline{C'P}|$.

5.4 Kreise am Dreieck

5.4.1 Satz (Inkreis)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gibt es genau einen Kreis, der alle drei Dreiecksseiten berührt, der sogenannte **Inkreis**. Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt I der Winkelhal-

bierenden. Der Radius r des Inkreises ist

$$r = \frac{\Delta}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

wobei $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ und Δ der Flächeninhalt des Dreiecks sind.

5.4.2 Satz (Umkreis)

Sei $\triangle(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gibt es genau einen Kreis, der durch alle drei Eckpunkte geht, der sogenannte **Umkreis** des Dreiecks. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt U der Mittelsenkrechten. Der Radius R des Umkreises ist gegeben als

$$R = \frac{a}{2\sin(\alpha)} = \frac{b}{2\sin(\beta)} = \frac{c}{2\sin(\gamma)} = \frac{abc}{4\Delta}$$

Bemerkung: Sehnen- und Tangentenvierecke werden in dieser Vorlesung NICHT mehr behandelt.

Stichwortverzeichnis

A

Abstand 7
Aufpunkt 13

B

Basis 29

D

Dreieck
    gleichschenklig 29
    gleichseitig 29
    rechtwinklig 31
Dreiecke
    ähnliche 33
    deckungsgleiche . . . . . *siehe* kongruente
    kongruente 33

F

F-Winkel 21
Fasskreisbogen 43

G

Geraden
    echt parallele 18
    parallel 18
    windschiefe 18

H

Halbgerade 17
    komplementäre 17
Hypotenuse 31

I

Inkreis 45

K

Kathete 31
kollinear 17
Kreis 37

L

Länge
    euklidische 7
Länge der Strecke 16

M

Mittelpunktswinkel 42

N

Nebenwinkel 20
Norm
    euklidische 7
Nullvektor 3

O

orthogonal 11
Ortsvektor 2

P

Parameterform 13
Peripheriewinkel 42
Polygon
    konvex 30

R

Richtungsvektor 13

S

Scheitelwinkel 20
Schenkel 29
Schwerpunkt 35
Sehne 40
Sekante 39
senkrecht 11
Skalarmultiplikation 4
Skalarprodukt 6
Standardraum $\mathbb{R}^n$ 1
Strecke 16
Stufenwinkel 21

T

Tangente 39
Transversale 34
    Ecktransversale 34

U

Umfangswinkel 42
Umkreis 46

V

Vektoraddition 4
Verbindungsgerade 15

W

Wechselwinkel 21

Z

Z-Winkel 21
Zentrale 39
Zentriwinkel 42
Zweipunktform 15