Analysis II

Universität Regensburg

(Dr. Werner Stich)

Julian Palme

(Stand: 28. März 2014)

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung 'Analysis II', gelesen von Herrn Dr. Werner Stich an der Universität Regensburg. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

Inhaltsverzeichnis

Differential- und Integralrechnung **1**

§ 13 Differentiation **1**
13.1 differenzierbar, Differenzenquotient, Differentialquotient (Def) . . . 1
13.2 Notiz . . . 1
13.3 differenzierbare Funktionen (Satz) . . . 1
13.4 differenzierbar – stetig (Satz) . . . 2
13.5 differenzierbar – stetig (Bsp) . . . 2
13.6 Notiz . . . 3
13.7 Rechenregeln (Satz) . . . 3
13.8 differenzierbar (Bsp) . . . 4
13.9 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 5
13.10 Kettenregel (Satz) . . . 5
13.11 Forsetzung von 13.9 (Bsp) . . . 6
13.12 Ableitung der Umkehrfunktion (Satz) . . . 6
13.13 Umkehrfunktion (Bsp) . . . 7
13.14 differenzierbar – gleiche Grenzwerte (Bem) . . . 8
13.15 Notiz . . . 8
13.16 Ableitungen höherer Ordnung (Def) . . . 8
13.17 differenzierbar – gleiche Grenzwerte (Bsp) . . . 9
13.18 Geometrische Interpretation der Ableitung . . . 10
13.19 zu 13.18, (1) (Bsp) . . . 11
13.20 zum Satz aus 13.18 (Bsp) . . . 12
13.21 differenzierbar – Existenz der Grenzwerte (Def) . . . 12
13.22 Notiz . . . 12

§ 14 Anwendungen der Differentialrechnung **13**
14.1 Aufgaben . . . 13
14.2 Maximum, Minimum, Extremum (Def) . . . 13
14.3 Extremum (Satz) . . . 13
14.4 Notizen . . . 14
14.5 Vorüberlegungen zu den Mittelwertsätzen . . . 14
14.6 Mittelwertsätze der Differentialrechnung (Satz) . . . 15
14.7 Lösung zu Aufgabe 14.1, (c) . . . 16
14.8 Lösung zu Aufgabe 14.1, (b) . . . 17
14.9 stetig differenzierbare Funktion – Ableitung (Bem) . . . 18
14.10 Monotoniekriterien (Satz) . . . 18
14.11 Notiz . . . 18
14.12 Hinreichende Bedingung für lokale Extrema (Satz) . . . 19
14.13 Lösung zu Aufgabe 14.1 . . . 19

Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome . . . 19
14.14 Taylorpolynom (Def) . . . 19
14.15 Satz von Taylor (Satz) . . . 20
14.16 Taylorpolynom (Bem) . . . 20
14.17 Taylorpolynom (Bsp) . . . 20
14.18 Taylorpolynom – Sinusfunktion (Bsp) . . . 20

Die Regeln von de L'Hospital . . . 21
14.19 Regeln von de L'Hospital (Satz) . . . 21
14.20 Regeln von de L'Hospital (Bsp) . . . 22

§ 15 Das Riemannsche Integral **24**
15.1 Skizze – Approximation durch Rechtecke/Treppenfunktion . . . 24
15.2 Treppenfunktion (Def) . . . 24
15.3 Treppenfunktionen bilden einen Untervektorraum (Bem) . . . 25
15.4 Integral von Treppenfunktionen (Def) . . . 25
15.5 Integral von Treppenfunktionen (Bem) . . . 25
15.6 lineares, monotones Funktional (Bem) . . . 25
15.7 Ober- und Unterintegral (Def) . . . 26
15.8 Notiz . . . 26
15.9 beschränkte, nicht Riemann-integrierbare Funktionen (Bsp) . . . 26
15.10 Notiz . . . 27
15.11 Skizze – Approximation durch Treppenfunktionen . . . 27
15.12 integrierbar – Treppenfunktionen (Satz) . . . 27
15.13 Riemannsche Summen (Def) . . . 28
15.14 Riemannsche Summen (Satz) . . . 28
15.15 stetig bzw. monoton – integrierbar (Satz) . . . 28
15.16 Linearitäts- und Monotonieeigenschaften (Satz) . . . 29
15.17 f_+ und f_- (Def) . . . 29
15.18 f_+ und f_- (Bem) . . . 29
15.19 integrierbare Funktionen (Satz) . . . 30
15.20 Notiz – ACHTUNG! . . . 30
15.21 Betrag – Integral (Satz) . . . 30
15.22 integrierbare Funktion (Satz) . . . 31
15.23 integrierbare Funktionen (Bem) . . . 31
15.24 besondere Integrale (Def) . . . 31
15.25 Flächeninhalt (Def) . . . 31
15.26 Flächeninhalt (Bsp) . . . 32
15.27 Skizze zum Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 33
15.28 Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz) . . . 33
15.29 konstante Funktionen (Bem) . . . 34
15.30 Stammfunktion (Def) . . . 34
15.31 Stammfunktion – konstante Funktion (Satz) . . . 34
15.32 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz) . . . 35
15.33 stetige Funktion – Stammfunktion (Bem) . . . 36

§ 16 Techniken des Integrierens **37**
16.1 Stammfunktion (Bsp) . . . 37
16.2 Substitutionsregel (Satz) . . . 39
16.3 Stammfunktion (Bsp) . . . 41
16.4 Stammfunktion (Bem) . . . 42
16.5 Stammfunktion (Bsp) . . . 42
16.6 Stammfunktion (Bem) . . . 43
16.7 Symmetrie – Stammfunktion (Satz) . . . 44
16.8 Stammfunktion (Bsp) . . . 46
16.9 „Mechanische“ Ausführung der Substitution (Bsp) . . . 46
16.10 Stammfunktion (Bsp) . . . 46
16.11 Vorüberlegung . . . 46
16.12 Partielle Integration (Satz) . . . 47

16.13 Stammfunktion (Bsp) . . . 47
16.14 Bemerkung zur numerischen Integration . . . 48

Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung) . . . 49
16.15 Allgemeine Überlegungen . . . 49
16.16 Integral (Bsp) . . . 50
16.17 Integral (Bsp) . . . 51

Rotationskörper . . . 51
16.18 Rotationskörper . . . 51
16.19 Volumen eines Rotationskörpers (Satz) . . . 52
16.20 Volumen eines Kreiskegels (Bsp) . . . 52
16.21 Volumen einer Rotationskörpers (Bsp) . . . 53
16.22 Rotation bzgl. der y-Achse . . . 53
16.23 Folgt wieder aus dem Cavalierischen Prinzip (Satz) . . . 54
16.24 Volumen eines Rotationskörpers (Bsp) . . . 54
16.25 Wichtige Stammfunktionen . . . 55

§ 17 Uneigentliche Integrale, Integralvergleichskriterium 56
17.1 Uneigentliches Integral (Def) . . . 56
17.2 konvergent bzw. divergent (Bsp) . . . 56
17.3 konvergent (Satz) . . . 56
17.4 vgl. Analysis I, 5.25 (Bem) . . . 57

§ 18 Potenzreihen 58
18.1 Staatsexamensaufgaben . . . 58
18.2 Potenzreihe, Koeffizienten (Def) . . . 58
18.3 Notiz . . . 58
18.4 Potenzreihe als Funktion (Bsp) . . . 59
18.5 Konvergenzradius (Def) . . . 59
18.6 Notiz . . . 59
18.7 punktweise und gleichmäßige Konvergenz (Def) . . . 60
18.8 absolute Konvergenz (Satz) . . . 60
18.9 Limes superior (Def) . . . 61
18.10 Limes superior (Bsp) . . . 61
18.11 Limes Superior (Bem) . . . 62
18.12 Formeln für die Bestimmung des Konvergenzradius (Satz) . . . 62
18.13 Konvergenz (Bsp) . . . 62
18.14 gleichmäßige Konvergenz – Stetigkeit (Satz) . . . 64
18.15 gleichmäßige Konvergenz (Satz) . . . 65
18.16 gleichmäßige Konvergenz – Differenzierbarkeit (Satz) . . . 65
18.17 Konvergenz (Satz) . . . 65
18.18 Konvergenz (Bsp) . . . 66
18.19 Taylorreihe (Def) . . . 67
18.20 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 67
18.21 Stammfunktion (Satz) . . . 67
18.22 identische Funktionen (Satz) . . . 67
18.23 Abelscher Grenzwertsatz (Satz) . . . 68

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ **68**

§ 19 Folgen im $\mathbb{R}^n$ **69**
19.1 Norm (Def) . . . 69
19.2 Eigenschaften der Norm (Bem) . . . 69
19.3 Norm (Bem) . . . 69
19.4 Abstand, Metrik (Def) . . . 70
19.5 Dreiecksungleichung (Bem) . . . 70
19.6 Folge im $\mathbb{R}^n$ (Def) . . . 70
19.7 Folge im $\mathbb{R}^n$ (Bsp) . . . 70
19.8 konvergent, Grenzwert, divergent (Def) . . . 71
19.9 Koordinatenfolge (Def) . . . 71
19.10 Koordinatenfolge (Satz) . . . 71
19.11 Koordinatenfolge (Bsp) . . . 71
19.12 offene bzw. abgeschlossene ε-Umgebung (Def) . . . 71
19.13 Folge (Bem) . . . 72
19.14 beschränkt, Teilfolge, Cauchy-Folge (Def) . . . 72
19.15 Grenzwert, Folge, Konvergenz (Satz) . . . 72
19.16 Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz) . . . 72
19.17 Stetigkeit einer Funktion (Def) . . . 73
19.18 ε-δ-Kriterium (Satz) . . . 73
19.19 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 73
19.20 Stetigkeit (Satz) . . . 74
19.21 Stetigkeit (Satz) . . . 74
19.22 stetige Funktionen (Bem) . . . 74
19.23 stetige Funktionen (Satz) . . . 74
19.24 Polynom (Def) . . . 74
19.25 Polynom (Bsp) . . . 75
19.26 einfache stetige Funktionen (Bsp) . . . 75
19.27 vergleiche 19.19 (Bsp) . . . 75
19.28 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 76

§ 20 Elementare Topologie auf $\mathbb{R}^n$ **77**
20.1 Umgebung, offen, abgeschlossen (Def) . . . 77
20.2 offen, abgeschlossen (Bem) . . . 77
20.3 Notiz . . . 77
20.4 Randpunkt, Rand (Def) . . . 77
20.5 offen, abgeschlossen (Bem) . . . 77
20.6 kompakt (Def) . . . 77
20.7 kompakt (Satz) . . . 78
20.8 kompakt (Satz) . . . 78
20.9 Notiz . . . 78

§ 21 Kurven im $\mathbb{R}^m$ **79**
21.1 Skizze für $m = 2$ . . . 79
21.2 Kurve, Spur, geschlossen (Def) . . . 79
21.3 Kurve (Bem) . . . 79
21.4 differenzierbar, stetig differenzierbar (Def) . . . 79
21.5 Notiz . . . 80
21.6 Spur (Bsp) . . . 80
21.7 Kurve, Spur (Bem) . . . 80
21.8 Kurve (Bsp) . . . 80

21.9 Approximation der Kurve durch Strecken . . . 81
21.10 Polygonzug (Def) . . . 81
21.11 rektifizierbare Kurve (Def) . . . 81
21.12 stetig differenzierbar – rektifizierbar (Satz) . . . 81
21.13 Länge einer Kurve (Bsp) . . . 82
21.14 Länge einer Kurve (Bsp) . . . 82
21.15 Länge eines Graphen (Satz) . . . 83
21.16 Tangentialvektor (Def) . . . 83
21.17 reguläre Kurven, Schnittwinkel (Bsp) . . . 84

§ 22 Partielle Ableitungen 85
22.1 Niveaumenge (Def) . . . 85
22.2 partiell differenzierbare Funktion, partielle Ableitung (Def) . . . 85
22.3 Notiz . . . 85
22.4 Sphären (Bsp) . . . 85
22.5 (stetig) partiell differenzierbare Funktion (Def) . . . 87
22.6 Notiz . . . 87
22.7 Gradient (Def) . . . 87
22.8 Gradient (Bsp) . . . 88
22.9 Gradient (Bem) . . . 88
22.10 Anschauliche Interpretation des Gradienten . . . 88
22.11 zweimal partiell differenzierbar (Def) . . . 88
22.12 partiell differenzierbar (Bsp) . . . 89
22.13 Satz von Schwarz (Satz) . . . 89

§ 23 Totale Differenzierbarkeit 90
23.1 (total) differenzierbar (Def) . . . 90
23.2 Notiz . . . 90
23.3 stetig, partiell differenzierbar (Satz) . . . 90
23.4 Differential, Jacobi-Matrix, Funktional-Matrix (Def) . . . 90
23.5 Zusammenfassung . . . 90
23.6 stetig (partiell) differenzierbare Funktion (Def) . . . 91
23.7 partielle Ableitung, Jacobi-Matrix (Bsp) . . . 91
23.8 Kettenregel (Satz) . . . 91
23.9 Folgerung aus 23.8 (Satz) . . . 92
23.10 Richtungsableitung, Skizze im $\mathbb{R}^2$ . . . 92
23.11 Ableitung einer Funktion in eine Richtung (Def) . . . 93
23.12 Richtungsableitung (Satz) . . . 93
23.13 Richtungsableitung (Bem) . . . 93

§ 24 Lokale Extrema 94
24.1 Aufgabe . . . 94
24.2 Aufgaben aus dem Staatsexamen . . . 94
24.3 lokales Maxiumum/Minimum (Def) . . . 94
24.4 Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums (Satz) . . . 94
24.5 kritischer Punkt (Def) . . . 94
24.6 Beispiel zu 24.1 (Bsp) . . . 95
24.7 Hesse-Matrix (Def) . . . 95
24.8 Notiz . . . 95
24.9 lineare Approximation 2. Ordnung von f mit Hilfe von Gradient und Hesse-Matrix (Satz) . . . 95
24.10 Bezeichnungen . . . 96

24.11 Hesse-Matrix (Satz) . . . 96
24.12 Bezeichnung . . . 96
24.13 Notiz . . . 96
24.14 Fortsetzung von 24.1 . . . 96
24.15 Gradient (Bsp) . . . 97
24.16 Notiz . . . 97
24.17 Beispiel . . . 98
24.18 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 98

Extrema und Nebenbedingungen **99**
24.19 Maximum unter einer Nebenbedingung (Bsp) . . . 99

§ 25 Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen 100
25.1 Der radioaktive Zerfall (Bsp) . . . 100

§ 26 Differentialgleichungen 1. Ordnung 101
26.1 Differentialgleichung 1. Ordnung (Def) . . . 101
26.2 Notiz . . . 101
26.3 Differentialgleichung 1. Ordnung (Bsp) . . . 101
26.4 globale bzw. lokale Ĺipschitz-Bedingung, Lipschitz-Konstante (Def) . . . 102
26.5 Lipschitz-Bedingung (Bsp) . . . 102
26.6 Lipschitz-Bedingung (Bsp) . . . 102
26.7 Lipschitz-Bedingung (Satz) . . . 103
26.8 Lipschitz-Bedingung (Bsp) . . . 103
26.9 Eindeutigkeitssatz (Satz) . . . 103
26.10 Eindeutigkeit NICHT immer erfüllt (Bsp) . . . 104
26.11 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf (Satz) . . . 104
26.12 Notiz . . . 104
26.13 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 105

§ 27 Elementare Lösungsmethoden zu Differentialgleichungen 1. Ordnung 106

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen **106**
27.1 eindeutig bestimmte Lösung (Bem) . . . 106
27.2 vergleiche Beispiel 26.13 (Bsp) . . . 107
27.3 Vorüberlegung zur Lösung von (F 27.2) . . . 107
27.4 Existez einer eindeutigen Lösung (Satz) . . . 108
27.5 Lösung einer Differentialgleichung (Bsp) . . . 108
27.6 allgemeine Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen . . . 109
27.7 Lösung einer Differentialgleichung (Bsp) . . . 110

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung **110**

Bezeichnungen . . . 110

Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung . . . 110
27.8 Lösung einer Differentialgleichung (Bem) . . . 110
27.9 Gesamtheit der Lösungen einer Differentialgleichung (Satz) . . . 111
27.10 Lösung einer Differentialgleichung (Bsp) . . . 111

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung . . . 112
27.11 Variation der Konstanten . . . 112
27.12 Existenz einer eindeutigen Lösung (Satz) . . . 113

27.13 Lösung einer Differentialgleichung (Bsp) . . . 113
27.14 Struktur der Lösungsmenge einer Differentialgleichung 1. Ordnung (Satz) . . . 114
27.15 Staatesexamensaufgabe (Bsp) . . . 115

§ 28 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung 116
28.1 freie Schwingung (Bsp) . . . 116

***Allgemeine Theorie* 116**
28.2 lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, (in)homogen (Def) . . . 116
28.3 Bezeichnung . . . 116
28.4 Struktur von $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ und $\mathcal{L}$ (Satz) . . . 117
28.5 Fundamentalsystem (Def) . . . 117
28.6 Eindeutigkeitssatz (Satz) . . . 117
28.7 Anfangsbedingung (Bsp) . . . 117
28.8 Wronski-Matrix, Wronski-Determinante (Def) . . . 118
28.9 Wronski-Kriterium für ein Fundamentalsystem (Satz) . . . 118
28.10 Wronski-Determinante (Bsp) . . . 118
28.11 Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung (Bem) . . . 119
28.12 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 119

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . 120
28.13 Notiz . . . 120
28.14 Vorüberlegung zu (F 28.9) . . . 121
28.15 charekteristisches Polynom (Def) . . . 121
28.16 Lösung einer Differentialgleichung (Satz) . . . 121
28.17 charakteristisches Polynom (Bsp) . . . 121
28.18 charakteristisches Polynom – Fundamentalsystem (Satz) . . . 121
28.19 linear unabhängige Lösungen einer Differentialgleichung (Satz) . . . 122
28.20 charakteristisches Polynom – Fundamentalsystem (Bsp) . . . 122
28.21 linear unabhängige Lösungen (Satz) . . . 122
28.22 linear unabhängige Lösungen – Fundamentalsystem (Bsp) . . . 122
28.23 Fundamentalsystem (Bsp) . . . 123
28.24 linear unabhängige Lösungen (Satz) . . . 124
28.25 Fundamentalsystem (Bsp) . . . 124
28.26 Zusammenfassung . . . 125
28.27 Existenzsatz (Satz) . . . 126

Inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . 126
28.28 Vorbemerkungen . . . 126
28.29 Variation der Konstanten . . . 126
28.30 Fundamentalsystem, spezielle Lösungen (Bsp) . . . 127
28.31 Spezielle Lösungsansätze . . . 129
28.32 Fundamentalsystem, spezielle Lösungen (Bsp) . . . 129
28.33 spezielle Lösung (Bsp) . . . 130
28.34 Lösung einer Differentialgleichung (Bem) . . . 131

§ 29 Lineare Differantialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 132
29.1 Differentialgleichungssystem (Bsp) . . . 132
29.2 lineares Differentialgleichungssystem, homogen (Def) . . . 132
29.3 Lösungsmenge (Satz) . . . 133
29.4 Lösung eines Differentialgleichungssystems (Satz) . . . 133
29.5 Fundamentalsystem zum Differentalgleichungssystems (Satz) . . . 134

29.6 Lösung eines Differentialgleichungssystems (Bsp) 134
29.7 Anmerkung 135
29.8 Weitere Methode zum Lösen eines einfachen Differentialgleichungssystems (Staatsexamensaufgabe) 135

Anhang A Anwendungen der Differentialrechnung – zu 14.1,(a) 137

Anhang B Konvexe und konkave Funktionen 138

Anhang C Definitionen aus der linaren Algebra bzw. Geometrie 141

Stichwortverzeichnis

Differential- und Integralrechnung

§ 13 Differentiation

Beschreibung des Änderungsverhaltens einer Funktion.
Sei im Folgenden $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

13.1 Definition (differenzierbar, Differenzenquotient, Differentialquotient)

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f heißt **differenzierbar im Punkt** $x_0 \in D$

$$:\Longleftrightarrow \quad f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{F 13.1}$$

existiert.
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt **Differenzenquotient** ($x \neq x_0$) und der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt **Differentialquotient** oder Ableitung von f im Punkt x_0.

(b) f heißt differenzierbar (in D), falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

13.2 Notiz

h einsetzen, leicht nachzurechnen

Setzt man $h := x - x_0$, so ist F 13.1 äquivalent zu

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

13.3 Satz (differenzierbare Funktionen)

Die folgenden Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Für die Funktion

(a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ ist $f'(x_0) = 0$;

(b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (Identität) ist $f'(x_0) = 1$;

! (c) $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$;

(d) $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$;

(e) $\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$.

Beweis

(a)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0$$

(b)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

FG = Fundamentalgleichung

(c)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} \overset{\text{FG}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0)\cdot\exp(h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$\overset{\text{Ana I}}{=} \exp(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}}_{=1 \text{ (Ana I)}} = \exp(x_0)$$

(d)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} \underset{\text{Ana I}}{\overset{!}{=}} \lim_{h\to 0} \frac{2\cdot\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}_{=\cos(x_0),\ \cos\ \text{stetig}} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{=1\ \text{(Ana I)}} = \cos(x_0)$$

(e) Übung

□

13.4 Satz (differenzierbar – stetig)

Vor: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in D$ differenzierbar.
Beh: f ist x_0 stetig.

Beweis

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in D$ und $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{x} 0$.
Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
Es gilt:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \begin{cases} 0 & \text{, für } x_n = x_0 \\ \underbrace{|x_n - x_0|}_{\to 0} \underbrace{\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}\right|}_{\to f'(x_0)} \longrightarrow 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

□

13.5 Beispiel (differenzierbar – stetig)

$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

f ist im Punkt $x_0 = 0$ NICHT differenzierbar, da f im Punkt $x_0 = 0$ NICHT stetig ist.

13.6 Notiz

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, f stetig in $x_0 \in D \overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow} f$ differenzierbar in x_0.

Beispiel

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = |x|$.

f ist in $\mathbb{R}$ stetig (Ana I).

f ist aber im Punkt $x_0 = 0$ NICHT differenzierbar, denn für die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1$$

für die Folge $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1$$

d. h. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existiert NICHT.

13.7 Satz (Rechenregeln)

Vor: $f, g, : D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar in $x_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beh:

(a) $f + g$, λf , $f \cdot g$: $D \longrightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar in x_0, wobei

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad , \quad \text{kurz: } (f+g)' = f' + g'$$
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0) \quad , \quad \text{kurz: } (\lambda f)' = \lambda f'$$
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$
$$\text{kurz: } (f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \textbf{Produktregel (PR)}$$

(b) Für $D_0 := \left\{ x \in D \;\middle|\; g(x) \neq 0 \right\}$ und $x_0 \in D_0$ ist $\frac{f}{g}: D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, wobei

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$
$$\text{kurz: } \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \textbf{Quotientenregel (QR)}$$

Spezialfall zu (b)

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad , \quad \text{kurz: } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

Beweis

(a)

$$f+g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)-f(x_0)\big)+\big(g(x)-g(x_0)\big)}{x-x_0}$$
$$\overset{f,g \text{ diffbar}}{=} \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{=f'(x_0)} + \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{=g'(x_0)}$$

Rest und (b) analog.

□

13.8 Beispiel (differenzierbar)

(a) Es sei $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = x^n\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$.
Beh: f_n ist differenzierbar in $\mathbb{R}$, wobei $f_n'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Beweis (durch vollständige Induktion)

Übung

□

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$

Beh: f ist differenzierbar in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $f'(x) = -nx^{n-1}$.

Beweis

Sei $f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}"ohne\{0\}$.
Mit (13.7), (b) Spezialfall folgt $(g(x) := x^n)$:

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \overset{\text{(a)}}{=} -\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^n \cdot x^n} = -\frac{n}{x\cdot x^n} = -n\cdot\frac{1}{x^{n+1}} = -n\cdot x^{-n-1}$$

□

(c) Beh: $\cot\colon \underbrace{\mathbb{R}\setminus N_{\sin}}_{=:D} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

Beweis

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \forall\, x \in D$$

Mit der Quotientenregel erhalten wir:

$$\cot'(x) = \frac{\cos'(x)\cdot\sin(x) - \cos(x)\cdot\sin'(x)}{\sin^2(x)}$$
$$\overset{(13.3)}{=} \frac{-\sin(x)\cdot\sin(x) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} \overset{\text{Ana I}}{=} -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

□

13.9 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{für } x > 0 \\ x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.
2 Probleme:

(i) Ableitung von $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) Ableitung von f im Punkt 0

13.10 Satz (Kettenregel)

Vor:

(a) $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$.

(b) f in $x_0 \in D$ und g in $y_0 = f(x_0) \in E$ differenzierbar.

Beh: $g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0) \quad , \quad \text{kurz: } (g \circ f)' = g'(f)\cdot f'$$

Beweis

[Fo1] §15, Satz 4

□

13.11 Beispiel (Forsetzung von 13.9)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{für } x > 0 \\ x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Beh: f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

Beweis

(i)

f ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, da sich f für $x < 0$ und $x > 0$ aus differenzierbaren Funktionen zusammensetzt.

(ii)

Beh: f ist im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar.

Beweis

Sei (x_n) eine Nullfolge; dann gilt:

$$\left|\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}\right| = \left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}|x_n| \underbrace{\left|1 + \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right|}_{\leq 2} & \text{, für } x_n > 0 \\ |x_n| & \text{, für } x_n \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| \leq |x_n| \xrightarrow[n\to\infty]{0}$$

d. h. f ist im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$.

□

13.12 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Vor:

(a) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $I \neq \emptyset$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und streng monoton.

$$f^{-1}\colon Y \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } Y := f(I)$$

sei die Umkehrfunktion (sie ist nach Ana I auch stetig und streng monoton).

(b) f sei in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$.

Beh: f^{-1} ist in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'\underbrace{(y_0)}_{=f(x_0)} = \frac{1}{f'\underbrace{\left(f^{-1}(y_0)\right)}_{=x_0}} \quad \text{, kurz: } (f^{-1}) = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

Beweis

[Fo1], §15, Satz 3

□

13.13 Beispiel (Umkehrfunktion)

- $\ln\colon]0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ ist Umkehrfunktion zu $\exp\colon\mathbb{R}\longrightarrow]0,\infty[$. Beh: $\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad\forall\, x>0$

Beweis

Sei $x>0$. Dann gilt:

$$\ln'(x)\overset{(13.12)}{=}\frac{1}{\exp'\big(\ln(x)\big)}\quad(x\hat{=}y_0)$$
$$\overset{(13.3)}{=}\frac{1}{\underbrace{\exp\big(\ln(x)\big)}_{\mathrm{id}}}=\frac{1}{x}$$

□

- Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ und $f\colon]0,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x)=x^{\alpha}$$

Beh: $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\quad\forall\, x>0$

Beweis

Sei $x>0$. Dann gilt:

$$(*)\quad x^{\alpha}=\exp\big(\ln(x^{\alpha})\big)\overset{\text{Ana I}}{=}\exp\big(\alpha\cdot\ln(x)\big)$$

Weiter gilt:

$$f'(x)\overset{(*)}{=}\Big(\exp\big(\alpha\cdot\ln(x)\big)\Big)'\overset{\mathrm{KR}}{=}\exp'\big(\alpha\cdot\ln(x)\big)\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}$$
$$\overset{(13.3)}{=}\exp\big(\alpha\cdot\ln(x)\big)\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}\overset{(*)}{=}x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

□

- Für $\arcsin\colon[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ gilt: Beh: $\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad\forall\, x\in]-1,1[$

Beweis

Sei $x \in [-1,1[$. Dann gilt

$$\arcsin'(x) \overset{(13.12)}{=} \frac{1}{\sin'\left(\arcsin(x)\right)} \overset{(13.3)}{=} \frac{1}{\cos\left(\arcsin(x)\right)} \overset{\text{Ana I}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

13.14 Bemerkung (differenzierbar – gleiche Grenzwerte)

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in]a,b[\subset D$.
Dann gilt: f ist in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = c \;:\Longleftrightarrow\; \lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und $\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existieren und beide haben den Wert c.

Beweis

Folgt direkt aus Ana I, angewendet auf die Funktion $h(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

□

13.15 Notiz

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, f differenzierbar in $D \setminus \{x_0\}$.

$$\lim_{x \nearrow x_0} f'(x) = \lim_{x \searrow x_0} f'(x) \overset{\text{i. A.}}{\not\Longrightarrow} f'(x_0) \text{ existiert.}$$

Beispiel:
$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x \quad \forall\, x \in]-1,1[\setminus\{0\}$$

Weiter gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} f'(x) = \lim_{x \searrow 0} 2x = 0 = \lim_{x \nearrow 0} 2x = \lim_{x \nearrow 0} f'(x)$$

f ist aber im Punkt 0 NICHT differenzierbar (d. h. $f'(0)$ existiert NICHT), da f im Punkt 0 NICHT stetig ist.

13.16 Definition (Ableitungen höherer Ordnung)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

(a) Eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt ***k*-mal differenzierbar im Punkt** $x_0 \in D$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f\colon D \cup U_\varepsilon(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(k-1)$-mal differenzierbar ist in $D \cap U_\varepsilon(x_0)$ und die $(k-1)$-te Ableitung von $f\Big|_{D\cap U_\varepsilon(x_0)}$ in x_0 differenzierbar ist.
In Symbolen:

$$f^{(k)}(x) := \frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k} := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k f(x)$$

(b) $f^{(0)}(x) := f(x)$, $f^{(1)} := f'(x)$ (Statt $f^{(2)}$ schreibt man auch $f''(x)$ usw.).

(c) $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **k-mal differenzierbar (in D)**, wenn $f^{(k)}(x)$ für alle $x \in D$ existiert. Die Funktion $f^{(k)}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man dann die **k-te Ableitung von f**.

(d) $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **k-mal stetig differenzierbar (in D)**, wenn $f^{(k)}(x)$ für alle $x \in D$ existiert und $f^{(k)}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

13.17 Beispiel (differenzierbar – gleiche Grenzwerte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Es gilt:

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{x^3-0}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} x^2 = 0$$
$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} x = 0$$

Also ist f nach (13.14) im Punkt 0 differenzierbar.

(i) Für die Ableitung von f gilt:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{, für } x \geq 0 \\ 3x^2 & \text{, für } x < 0 \end{cases}$$

$f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig (wie man leicht nachprüft).
Also ist f stetig differenzierbar.

(ii) Weiter gilt:
$f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar für alle $x \neq 0$ mit

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{, für } x > 0 \\ 6x & \text{, für } x < 0 \end{cases}$$

Wegen

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$
$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\nearrow 0} 3x = 0$$

existiert $f''(0)$ NICHT, d. h. f' ist im Punkt 0 NICHT differenzierbar.

13.18 Geometrische Interpretation der Ableitung

(1) **Definition**

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, $]a,b[\subset D$, $x_0 \in]a,b[$. Die Gerade

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto r(x-x_0)+s \ , \ r,x \in \mathbb{R}$$

heißt **Tangente** an dem Graphen von f im Punkt $x_0 :\Longleftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ derart, dass

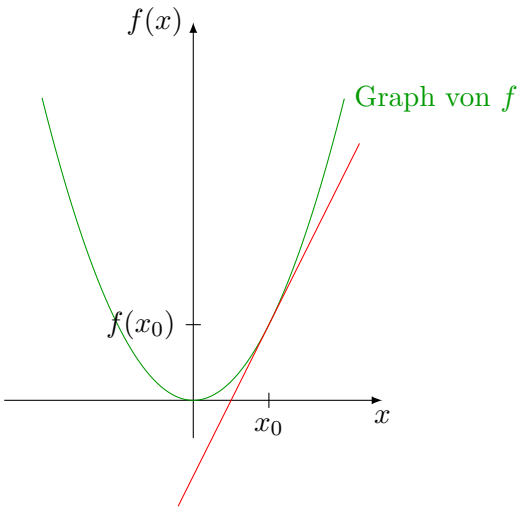
$$(*) \quad |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon \cdot |x-x_0| \quad \forall\ x \in]a,b[\text{ mit } |x-x_0| < \delta$$

(2) **Satz**

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, $]a,b[\subset D$, $x_0 \in]a,b[$.
Dann gilt:
$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Tangente an dem Graphen von f im Punkt x_0
$\Longleftrightarrow$ f ist in x_0 differenzierbar und $g(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

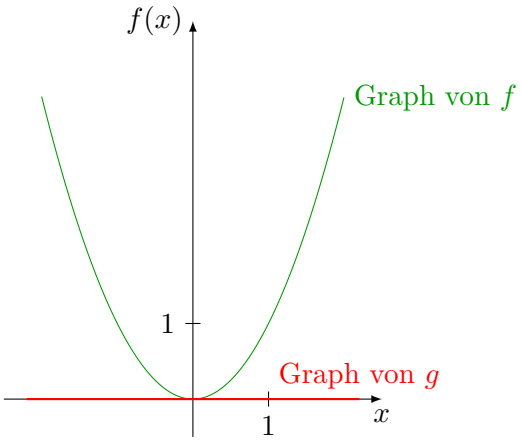
(3) **Folgerung aus (2)**

$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an dem Graph f im Pnkt x_0.



13.19 Beispiel (zu 13.18, (1))

(1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto x^2$



Beh: die Gerade $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = 0$, ist Tangente an dem Graphen von f im Punkt $x_0 = 0$.

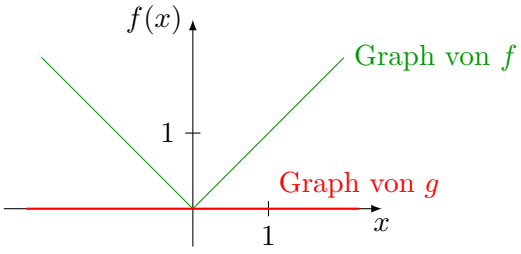
Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Wähle $\delta = \varepsilon$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$ gilt dann:

$$|f(x) - g(x)| = |x^2| = |x|^2 = |x^2| < \delta \cdot |x| = \varepsilon \cdot |x| = \varepsilon \cdot |x - 0|$$

□

(2) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto |x|$



Die Gerade $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = 0$, ist KEINE Tangente an den Graphen von f im Punkt $x_0 = 0$.
Denn für "$epsilon := \frac{1}{2}$ gilt:

$$|f(x) - g(x)| = |x| > \frac{1}{2} \cdot x = \varepsilon \cdot x$$

Die Bedingung $(*)$ aus (13.18), (1) ist also für KEIN $\delta > 0$ erfüllbar.

13.20 Beispiel (zum Satz aus 13.18)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = x^4 \cdot \exp(x)$$

Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x_0 = -3$.
Lösung:
f ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar, also existiert die Tangente im Punkt $x_0 = -3$.
Es gilt:

$$f'(x) \overset{\text{PR}}{=} 4x^3 \cdot \exp(x) + x^4 \cdot \exp(x)$$

Die Tangente $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist nach (13.18), (2), definiert durch

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(-3)(x-(-3)) + f(-3) = (4\cdot(-3)^3 \cdot e^{-3} + (-3)^4 \cdot e^{-3})(x+3) + (-3)^4 e^{-3} \\ &= -27e^{-3}(x+3) + 81e^{-3} = -27e^{-3} \cdot x \approx -1,344x \end{aligned}$$

13.21 Definition (differenzierbar – Existenz der Grenzwerte)

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar (auf $[a,b]$) $:\Longleftrightarrow$ $f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar (auf $]a,b[$) und $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ existieren.
(Analog für $f\colon [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f\colon]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$)

13.22 Notiz

Ist $f\colon]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $[a,b] \subset]c,d[$, so sind auch

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f\colon [a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f\colon]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar.

§ 14 Anwendungen der Differentialrechnung

Extrema, Mittelwertsätze, Monotoniekriterien.

14.1 Aufgaben

(a) Gegeben sei die Funktion $h\colon]0,c[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(c-x)^2}$, wobei $a,b,c \in]0,\infty[$ (vgl. **??**).
Finde das Minimum der Funktion h.

(b) (Staatsexamensaufgabe)

! (i) Beweisen Sie

$$|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(ii) Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k\geq 1} 2^k f\left(\frac{1}{k}\right) \sin\left(\frac{1}{3^k}\right)$$

konvergiert.

(c) (Staatsexamensaufgabe)
Beweisen Sie:

$$|\sin^3(x) + \cos(x) - \sin^3(y) - \cos(y)| \leq 4|x-y| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

14.2 Definition (Maximum, Minimum, Extremum)

(a) $f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $x_0 \in]a,b[$ ein lokales **Maximum** (bzw. **Minimum**) $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ derart, dass

$$(*) \quad f(x_0) \geq f(x) \quad \Big(\text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x)\Big) \ \forall\, x \in U_\varepsilon(x_0)$$

(**Extremum** ist der Oberbegriff für Maximum und Minimum).

(b) Gilt in $(*)$ $f(x_0) > f(x)$ $\Big(\text{bzw. } f(x_0) < f(x)\Big)$ $\forall\, x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ so spricht man von einem **isolierten Extremum** (Maximum bzw. Minimum).

14.3 Satz (Extremum)

Besitzt die Funktion $f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in]a,b[$ ein lokales Extremum und existiert $f'(x_0)$, so ist

$$f'(x_0) = 0$$

Beweis

(i) f besitze in $x_0 \in]a,b[$ ein lokales Minimum, d. h. $\exists\, \varepsilon > 0$ derart, dass

$$(*) \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(x_0)$$

Da $f'(x_0)$ existiert, gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(*)}{\geq} 0$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(*)}{\leq} 0$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

(ii) Analog für lokales Maximum

□

14.4 Notizen

(a) Aus $f'(x_0) = 0 \overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow}$ f besitzt in x_0 ein lokales Extremum.

Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.
$f'(0) = 0$, ABER f hat im Punkt 0 KEIN lokales Extremum.

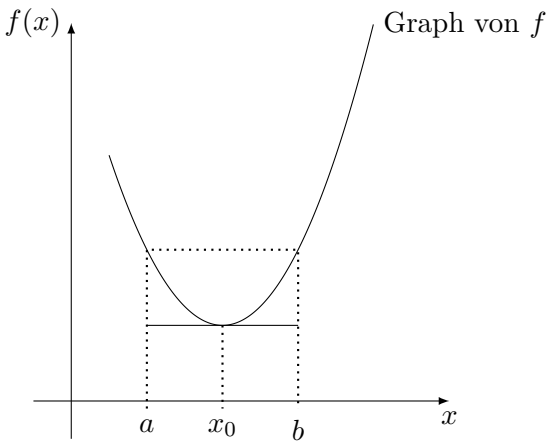
(b) Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind die Kandidaten für ein absolutes (globales) Maximum bzw. Minimum zu suchen in den Punkten $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$, in den Randpunkten a und b und in den Punkten, in denen f nicht differenzierbar ist.
(Skizzen im Anhang A 14.2)

(c) Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum (Ana I).

Im Folgenden sei $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

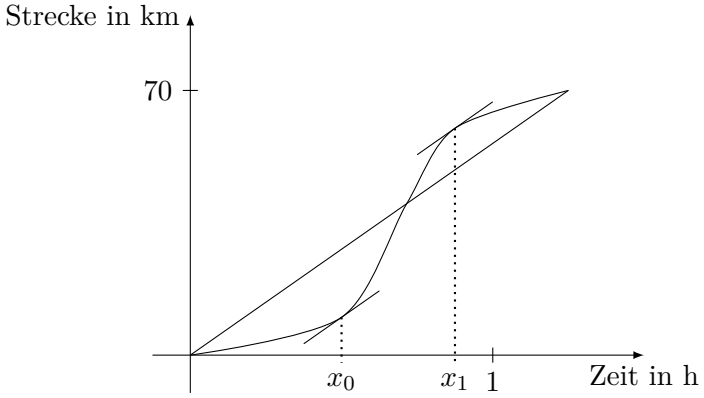
14.5 Vorüberlegungen zu den Mittelwertsätzen

(a) **„Satz von Rolle“**



f ist differenzierbar, $f(a) = f(b)$
$\rightsquigarrow$ $\exists\, x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

(b) **Mittwelwertsatz** (MWS)
Fahrt von Regensburg nach Landshut (Entfernung 70 km, 1 Std. 15 min.)



Das Auto hat mindestens einmal die Momentangeschwindigkeit 56 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

14.6 Satz (Mittelwertsätze der Differentialrechnung)

(a) (Satz von Rolle)

Vor:

- $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion
- $a < b$
- $[a,b] \subset D$
- $f(a) = f(b)$
- f differenzierbar in $]a,b[$.

Beh: Es existiert ein $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = 0$.

Insbesondere gilt: Zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion liegt mindestens eine Nullstelle ihrer Ableitung.

(b) **MWS der DR** (Verallgemeinerung des Satzes von Rolle)

Vor:

- $g, f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen
- $a < b$
- $[a,b] \subset D$
- g und f seien differenzierbar in $]a,b[$.

Beh: Es existiert ein $x_0 \in]a,b[$ derart, dass

$$(*) \quad \big(f(b) - f(a)\big) \cdot g'(x_0) = \big(g(b) - g(a)\big) \cdot f'(x_0)$$

Ist außerdem $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in]a,b[$, so gilt

$$(**) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

(c) **MWS der DR** (Spezialfall von (b), $g = \mathrm{id}_D$) !

Vor:

- $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion
- $a < b$
- $[a,b] \subset D$
- f differenzierbar in $]a,b[$.

Beh: Es existiert ein $x_0 \in]a,b[$ mit der Eigenschaft

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)}$$

Beweis

Zentralübung

□

14.7 Lösung zu Aufgabe 14.1, (c)

Beh: $|sin^3(x) + \cos(x) - \sin^3(y) - \cos(y)| \leq 4|x-y| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$

Beweis

1. Fall

$x = y \implies$ L.S. $= 0 =$ R.S. ✓

2. Fall

$x \neq y$, o. E. $x < y$

Sei $f\colon [x,y] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \sin^3(t) + \cos(t)$$

Es gilt:

$$f'(t) = 3 \cdot \sin^2(t) \cdot \cos(t) - \sin(t)$$

Nach Satz (14.6), (c) existiert ein $x_0 \in]x,y[$ derart, dass

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin^3(x) + \cos(x) - (\sin^3(y) + \cos(y))}{x-y}\right| &= |3\sin^2(x_0)\cdot\cos(x_0) - \sin(x_0)| \\ &\overset{\Delta\text{-UG}}{\leq} 3 \cdot \underbrace{|\sin^2(x_0)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\cos(x_0)|}_{\leq 1} + |-\sin(x_0)| \\ &= 3|\sin^2(x_0)\cos(x_0)| + \underbrace{|\sin(x_0)}_{\leq 1} \leq 4\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung

□

14.8 Lösung zu Aufgabe 14.1, (b)

(i) Beh: $|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Beweis

$x = 0 \quad \checkmark$

Sei $x > 0$.

Dan sin differenzierbar ist, existiert nach dem MWS der DR (14.6), (c), ein $x_0 \in]0, x[$ derart, dass

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(x_0)$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \underbrace{|\sin'(x_0)|}_{\cos(x_0)} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \; |\sin(x)| \leq |x|$$

Analog für $x < 0$.

□

Beh: $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gilt

(ii)
$$(*) \quad \sum_{k \geq 1} \underbrace{2^k f\left(\frac{1}{k}\right) \sin\left(\frac{1}{3^k}\right)}_{a_k}$$

ist konvergent.

Beweis

f ist stetig, $[0,1]$ abgeschlossenes, beschränktes Intervall $\overset{\text{Ana I}}{\Longrightarrow}$ f ist beschränkt, d. h. $\exists\, K \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq K \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Weiter gilt

$$(**) \quad |a_k| = \left|2^k f\left(\frac{1}{k}\right) \sin\left(\frac{1}{3^k}\right)\right|$$

$$= 2^k \cdot \underbrace{\left|f\left(\frac{1}{k}\right)\right|}_{\leq K} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{3^k}\right)\right|}_{\leq \frac{1}{3^k}}$$

$$\leq K \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Da $\sum\limits_{k\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergent ist $\Big($UGR - unendliche Geometrische-Reihe, $\left|\frac{2}{3}\right| < 1\Big)$, ist auch $\sum\limits_{k\geq 1} K\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergent, d. h. wir haben wegen $(**)$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{k\geq 1} a_k$ gefunden ... *Analysis I.*

□

14.9 Bemerkung (stetig differenzierbare Funktion – Ableitung)

Vor: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $I \setminus \{x_0\}$ differenzierbar.

Beh: Ist $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$, so existiert $f'(x_0)$ und $f'(x_0) = c$.

Beweis

Zentralübung

□

14.10 Satz (Monotoniekriterien)

Vor: $f\colon [ab] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in $]a,b[$ differenzierbar.

Beh:

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\iff f$ in $[a,b]$ monoton wachsend

(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\implies f$ in $[a,b]$ streng monoton wachsend

(iii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\iff f$ in $[a,b]$ monoton fallend

(iv) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in]a,b[\implies f$ in $[a,b]$ streng monoton fallend

Beweis

Mit Hilfe des MWS der DR.

□

14.11 Notiz

f streng monoton wachsend $\overset{\text{i. A.}}{\not\Longrightarrow}$ $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in]a,b[$

f streng monoton fallend $\overset{\text{i. A.}}{\not\Longrightarrow}$ $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in]a,b[$

Beispiel

$f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x^3$ (bzw. $x \longmapsto -x^3$)

f ist s.m.w. (bzw. s.m.f.), aber $f'(0) = 0$.

14.12 Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema)

Vor: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $]a,b[\subset D$, f differenzierbar in $]a,b[$, f zweimal differenzierbar in $x_0 \in]a,b[$, d. h. $f''(x)$ existiert.

Beh: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$) $\Longrightarrow$ f besitzt in x_0 ein isoliertes lokales Minimum (bzw. Maximum)

Beweis

Es sei $f''(x_0) > 0$. Wegen

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} =: U$$

Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt daraus

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall\, x \in U\ ,\ x > x_0 \\ f'(x) < 0 & \forall\, x \in U\ ,\ x < x_0 \end{cases}$$

Mit 14.10 folgt

$$\begin{cases} f \text{ s.m.w.} & \text{für } x \in U\ ,\ x > x_0 \\ f \text{ s.m.f.} & \text{für } x \in U\ ,\ x < x_0 \end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung.
Analog für $f''(x_0) < 0$.

□

14.13 Lösung zu Aufgabe 14.1

Zentralübung.

Approximation differenzierbarer Funktionen durch Polynome

14.14 Definition (Taylorpolynom)

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei in einer ε-Umgebung ($\varepsilon > 0$) von $a \in D$ n-mal stetig differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} T_n(x;a) = T_n(x;a,f) &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

das n-te **Taylorpolynom** von f um den Entwicklungspunkt a.

14.15 Satz (Satz von Taylor)

Vor: $D \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $a, x \in D$, $x \neq a$.

Beh: Es existiert ein x_0 zwischen a und x (x_0 hängt ab von n, a und x) derart, dass

$$f(x) = T_n(x; a, f) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Fehlerterm}}$$

Beweis

Idee: Mehrmaliges Anwenden des Satzes von Rolle.

□

14.16 Bemerkung (Taylorpolynom)

Ist $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n (jedes Polynom ist beliebig oft differenzierbar), dann folgt mit 14.15 für $a \in \mathbb{R}$

$$p(x) = T_n(x; a, p) = p(a) + p'(a)(x-a) + \ldots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

14.17 Beispiel (Taylorpolynom)

Sei $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom 3. Grades mit $p(1) = 9$, $p'(1) = 23$, $p''(1) = 26$, $p'''(1) = 6$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ p(x) = T_3(x;1) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2}p''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{6}p'''(1)(x-1)^3 \\ &= 9 + 23(x-1) + 13(x-1)^2 + (x-1)^3 = x^3 + 10x^2 - 2 \end{aligned}$$

14.18 Beispiel (Taylorpolynom – Sinusfunktion)

Approximation der Sinus-Funktion durch Taylorpolynome im Entwicklungspunkt $a = 0$.

$$\begin{aligned} T_0(x;0,\sin) &= \sin(0) = 0 \\ T_1(x;0,\sin) &= \sin(0) + \cos(0)\cdot x = x \\ T_2(x;0,\sin) &= \sin(0) + \cos(0)\cdot x + \frac{-\sin(0)}{2!}\cdot x^2 = x \\ T_3(x;0,\sin) &= x - \frac{\cos(0)}{3!}\cdot x^3 = x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 \\ T_4(x;0,\sin) &= x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 \\ &\ldots \end{aligned}$$

(vgl. Analysis I, Reihendarstellung des Sinus)

Güte der Approximation

x	$T_3(x;0)$	$T_{17}(x;0)$	$\sin(x)$
1	$0,833\ldots$	$0,84147\ldots$	$0,84147\ldots$
π	$-2,026$	$0,00000002$	0
5	$-15,8$	$-0,95877\ldots$	$-0,95892\ldots$

Die Regeln von de L'Hospital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\xrightarrow[x\to 1]{0}}}{\underbrace{x-1}_{\xrightarrow[x\to 1]{0}}} =?? \qquad ; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\xrightarrow[x\to\infty]{\infty}}}{\underbrace{x-1}_{\xrightarrow[x\to\infty]{\infty}}} =??$$

14.19 Satz (Regeln von de L'Hospital)

Vor: Sei $I =]a,b[$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$, $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen, $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$ und es existiert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: s \in \mathbb{R}$$

Beh:

(a) $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = \lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = 0 \implies g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$ und $\lim\limits_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = s$.

(b) $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x\nearrow b} g(x) = -\infty \implies \exists\, x_0 \in]a,b[$ derart, dass $g(x) \neq 0$ für $x \ge x_0$ und es gilt $\lim\limits_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = s$.

Analoge Aussagen gelten für $x \searrow a$ und für $x \to c$.

Beweis

[Fo1], §16, Satz 10

□

14.20 Beispiel (Regeln von de L'Hospital)

(a) Beh: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}}$

Beweis

$\ln, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} -1$ sind in einer Umgebung von 1 differenzierbar und $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} -1)' \neq 0$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln'(x)}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} = 1 \overset{\text{l'H}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

□

(b) Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Beweis (Kurzform)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to\infty}}{\underbrace{x}_{\to\infty}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 = s$$

□

(c) Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$

Beweis

$$\frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \frac{3x^2}{e^x}$$
$$\frac{(3x^2)'}{(e^x)'} = \frac{6x}{e^x}$$
$$\frac{(6x)'}{(e^x)'} = \frac{6}{e^x} \xrightarrow{x\to\infty} 0 \overset{\text{l'H}}{\Longrightarrow} 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

□

(d) Beh: $\lim x \to 0 \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} = ??$

Beweis (Kurzform)

In $U_1(0) \setminus \{0\}$ sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ungleich 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x)} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{2\sin(x)\cos(x)}$$
$$\overset{\text{Ana I}}{=} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)}{\cos(x)}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)}}_{=1} = 1$$

□

Konvexe und konkave Funktionen

siehe Anhang B
Fragen dazu in der ZÜ am 08/05/2013.

§ 15 Das Riemannsche Integral

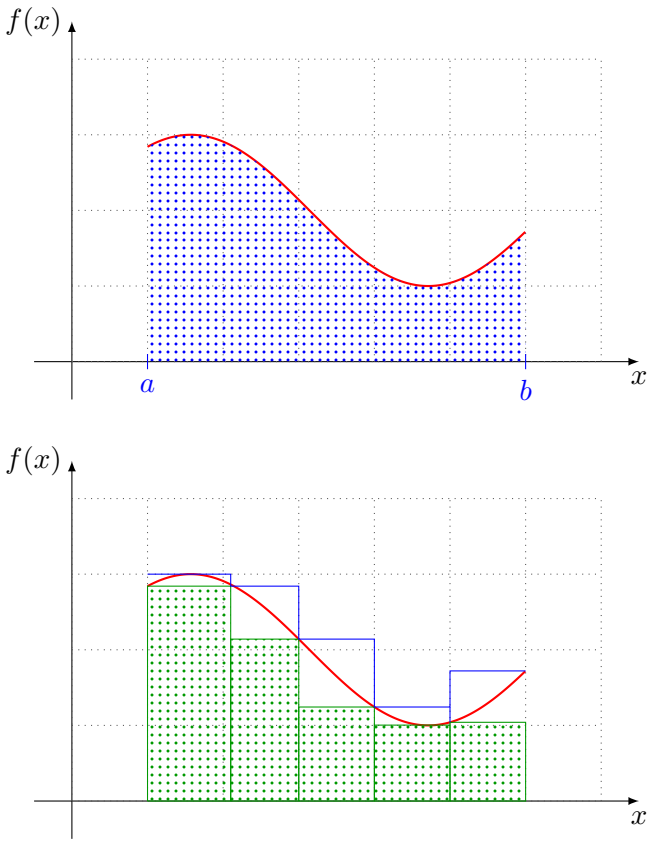
Zwei Aspekte des Riemannschen Integrals liegen diesem Paragraphen zu Grunde:

(1) Das Integral dient zur Flächenberechnung. Der Herleitung des Integrlas liegt dieser Aspekt zu Grunde.

(2) Die Integration ist die Umkehrung der Differentiation. Diese Überlegung liefert u. a. Formeln zum Berechnen des Integrals.

Die Definition des Integrals (genau: des Riemannschen[1] Integrals) erfolgt häufig über Flächeninhalte, d. h. durch Approximation einer Fläche durch Rechtecke.

15.1 Skizze – Approximation durch Rechtecke/Treppenfunktion



Das „Integral“ einer Funktion f soll als sinnvoll definiert gelten, wenn der Grenzwert der unteren und der Grenzwert der oberen Approximation gleich sind.

15.2 Definition (Treppenfunktion)

Es sei $a < b$.

(a) Die Funktion $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass

$$\varphi(x) = c_k \quad \forall\, x \in (x_{k-1}, x_k)\ ,\ k = 1, \ldots, n$$

[1] Riemann Berhard, 1826 bis 1866, deutscher Mathematiker

(b) Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$ wird bezeichnet mit

$$T[a,b] := \left\{ \varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \varphi \text{ Treppenfunktion} \right\}$$

(c) $X := \{x_0, \ldots, x_n\}$ und $Y := \{y_0, \ldots, y_m\}$ seien Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$. Dann heißt die Unterteilung X **feiner** als die Unterteilung Y, wenn $Y \subset X$.

Beispiel: $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$ ist feiner als $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$

15.3 Bemerkung (Treppenfunktionen bilden einen Untervektorraum)

Die Menge $T[a,b]$ ist ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, d. h.

(1) $0 \in T[a,b]$

(2) $\varphi, \psi \in T[a,b] \implies \varphi + \psi \in T[a,b]$

(3) $\varphi \in T[a,b]\ ,\ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\varphi \in T[a,b]$

15.4 Definition (Integral von Treppenfunktionen)

$\varphi \in T[a,b]$ sei definiert bzgl. der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, wobei

$$\varphi(x) = c_k \quad \text{für } x \in]x_{k-1}, x[\ ,\ k = 1, \ldots, n$$

Dann heißt

$$\int \varphi = \int_a^b \varphi = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) \in \mathbb{R}$$

das **Integral** von φ.

15.5 Bemerkung (Integral von Treppenfunktionen)

Die Definition des Integrals einer Treppenfunktion ist unabhängig von der Unterteilung.

Beweis

siehe [Fo1], §18.

□

15.6 Bemerkung (lineares, monotones Funktional)

Das Integral für Treppenfunktionen ist ein lineares, monotones Funktional auf $T[a,b]$, d. h. für $\varphi, \psi \in T[a,b]\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $\int_a^b (\varphi + \psi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_a^b (\lambda\varphi)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

(3) $\varphi \leq \psi \implies \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x$

15.7 Definition (Ober- und Unterintegral)

$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion.

(a) Das Oberintegral von f ist

$$\overset{*}{\int} f = \int\limits_a^{b*} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{ \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in T[a,b]\ ,\ \varphi \geq f \right\}$$

(b) Das Unterintegral von f ist

$$\underset{*}{\int} f = \int\limits_{a*}^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{ \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in T[a,b]\ ,\ \varphi \leq f \right\}$$

(c) Ist

$$\int\limits_a^{b*} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a*}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

so heißt f **Riemann-integrierbar** (kurz: integrierbar) und

$$\int f = \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^{b*} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a*}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt das **Riemann-Integral** von f (kurz: Integral von f).

15.8 Notiz

Für $f = \varphi \in T[a,b]$ liefern die Integraldefinitionen aus 15.4 und 15.7 das gleiche Ergebnis.

15.9 Beispiel (beschränkte, nicht Riemann-integrierbare Funktionen)

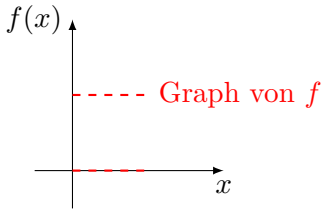
Die Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1, & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

Dann ist

$$\overset{*}{\int} f = 1 \qquad \text{und} \qquad \underset{*}{\int} f = 0$$

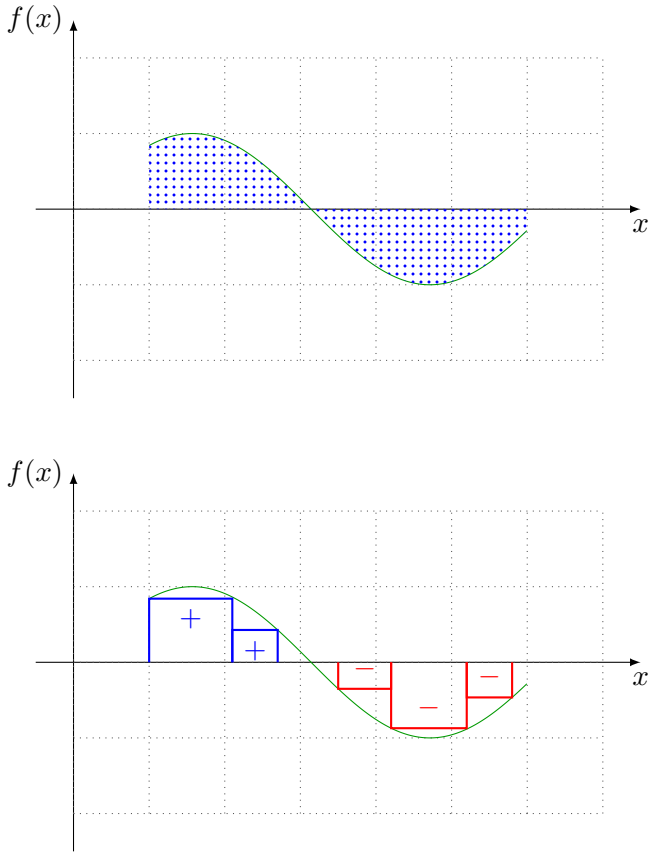
f ist also NICHT Riemann-integrierbar.



15.10 Notiz

Die Berechnung von $\overset{*}{\int} f$ und $\int f$ sind i. d. R. sehr aufwändig. Später werden wir Integrale mit Hilfe von „Stammfunktionen“ $\overset{*}{}$berechnen.

15.11 Skizze – Approximation durch Treppenfunktionen



15.12 Satz (integrierbar – Treppenfunktionen)

Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funkition.

Beh: f ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ und ψ existieren mit der Eigenschaft

$$\psi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

Beweis

siehe [Fo1], §18.

□

15.13 Definition (Riemannsche Summen)

Die Riemannschen Summen lassen etwas mehr Spielraum bei der Approximation des Integralwertes einer Funktion durch eindliche Summen.
$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sie eine Funktion, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ sei eine Unterteilung von $[a,b]$ und $a_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \ldots, n$.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1})$ heißt **Riemannsche Summe** der Funktion f (bzgl. der Unterteilung $x_0, \ldots, x_n$ und den Stützstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$).

(b) $\eta := \max \left\{ x_k - x_{k-1} \;\middle|\; 1 \leq k < n \right\}$ heißt **Feinheit der Unterteilung** $x_0, \ldots, x_n$.

15.14 Satz (Riemannsche Summen)

Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion. Bezeichungen wie in vorhergehender Definition.

Beh: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für jede Unterteilung von $[a,b]$ mit Feinheit $\eta < \delta$ gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \varepsilon$$

Beweis

siehe [Fo1], §18.

□

15.15 Satz (stetig bzw. monoton – integrierbar)

Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

Beh:

(a) Ist f stetig, so ist f integrierbar.

(b) Ist f monoton, so ist f integrierbar.

Beweis

siehe [Fo1], §18.

□

15.16 Satz (Linearitäts- und Monotonieeigenschaften)

! Vor: $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien integrierbare Funmtionen und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beh: $f+g$ und λf sind integrierbar und es gelten

(a) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(b) $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

(c) $f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Beweis

siehe [Fo1], §18.

□

15.17 Definition (f_+ und f_-)

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren die Funktionen

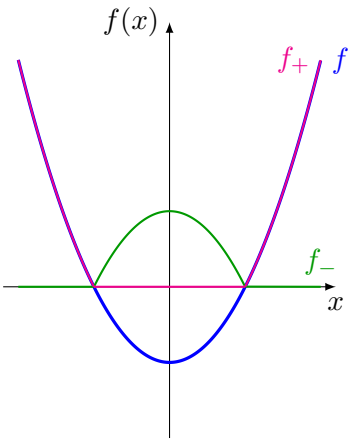
$$f_+, f_-\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



15.18 Bemerkung (f_+ und f_-)

Mit den Bezeichungen aus der vorhergehenden Definition gilt:

$$f = f_+ - f_- \qquad ; \qquad |f| = f_+ + f_-$$

15.19 Satz (integrierbare Funktionen)

Vor: $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien integrierbare Funktionen.
Beh:

(a) f_+ und f_- sind integrierbare Funktionen.

(b) Für jedes $p \in [1, \infty[$ ist die Funktion $|f|^p$ integrierbar.

(c) Die Funktion $f \cot g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis

siehe [Fo1], §18.

□

15.20 Notiz – ACHTUNG!

Im Allgemeinen ist !

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel: (Zur Berechnung der Integrale $\rightsquigarrow$ siehe später.)
$f, g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch $f(x) = g(x) = x$ für alle $x \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

15.21 Satz (Betrag – Integral)

Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion. !
Beh:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Beweis

Nach 15.19 ist $|f|$ integrierbar und es gilt

$$f(x) \leq |f(x)| \quad \text{und} \quad -f(x) \leq |f(x)| \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Daraus folgt mit 15.16

$$(*) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int ab|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

und

$$(**) \quad -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{15.16}{=} \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \overset{15.16}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Behauptung.

□

15.22 Satz (integrierbare Funktion)

! Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $c \in (a,b)$.

Beh:

(a) f integrierbar $\iff$ $f\Big|_{[a,c]}$ und $f\Big|_{[c,b]}$ sind integrierbar.

(b) f integrierbar $\implies$ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

15.23 Bemerkung (integrierbare Funktionen)

Vor: $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen, die Menge $\left\{x \in [a,b] \;\middle|\; f(x) \neq g(x)\right\}$ sei endlich und f sei integrierbar.

Beh: g ist integrierbar und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

15.24 Definition (besondere Integrale)

!

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

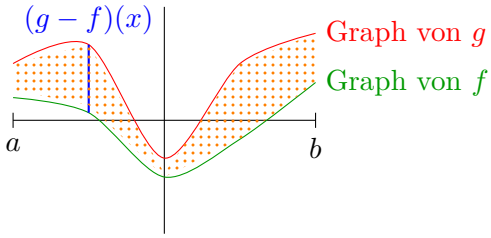
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \text{ falls } b < a$$

15.25 Definition (Flächeninhalt)

$f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen und $f \leq g$. Dann nennt man die reelle Zahl

$$\int_a^b \underbrace{(g-f)(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x$$

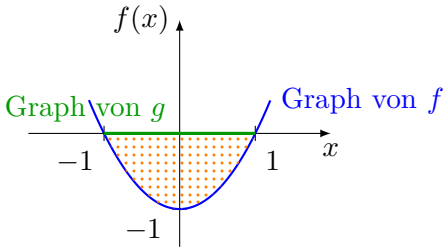
den **Flächeninhalt** der Menge $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b\,,\ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}$.



$\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Rechne am besten linke Seite aus!

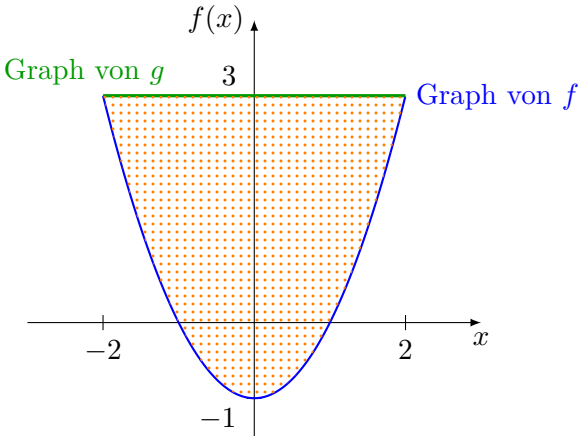
15.26 Beispiel (Flächeninhalt)

(a) $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^2 - 1.$



$$FI(//) = \int_{-1}^{1} (0-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} -f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

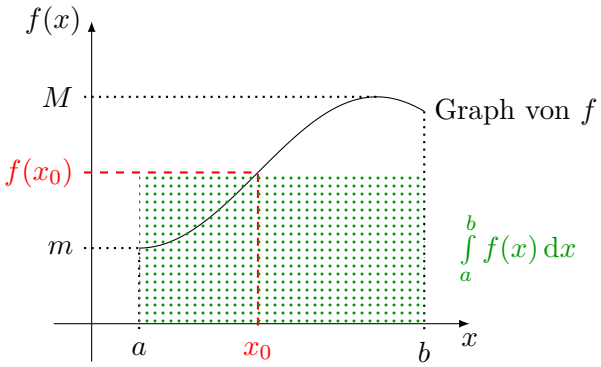
(b) $f\colon [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ f(x) = x^2 - 1.$



$$FI(//) = \int_{-2}^{2} 3-(x^2-1)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 4-x^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{32}{3}$$

15.27 Skizze zum Mittelwertsatz der Integralrechnung

(Einfache Situation, Spezialfall)



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
Es gibt ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$f(x_0)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

15.28 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Vor: $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen und $g \geq 0$

Beh: Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ derart, dass

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Für den Spezialfall $g \equiv 1$ (d. h. $g(x) = 1 \quad \forall\, x \in [a,b]$) folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\cdot(b-a)$$

für ein $x_0 \in [a,b]$.

Beweis

Sei $m := \inf\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in [a,b] \right\}$ und $M := \sup\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in [a,b] \right\}$. Es gilt

$$m \cdot g(x) \overset{g\geq 0}{\leq} f(x)\cdot g(x) \overset{g\geq 0}{\leq} M \cdot g(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Daraus folgt

$$m \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Somit existiert ein $\alpha \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$
$\rightsquigarrow$ wähle $\alpha \in [m, M]$ beliebig

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0 \implies \alpha = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

Da f stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz die Existenz eines $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = \alpha$.
□

15.29 Bemerkung (konstante Funktionen)

$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion. Dann gilt:

$$f \text{ konstant} \iff f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in I$$

Beweis

(⇒) klar

(⇐)

Seien $x_1, x_2 \in I\ ,\ x_1 < x_2$. Nach dem MWS d. DR $\exists\ x_0 \in]x_1, x_2[$ derart, dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0) = 0$$

$\implies f(x_2) = f(x_1)$

□

15.30 Definition (Stammfunktion)

Sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt **Stammfunktion** von f.

15.31 Satz (Stammfunktion – konstante Funktion)

Vor: $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine weitere Funktion.

Beh: G ist Stammfunktion von $f \iff (G - F)\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist konstante Funktion, d. h. $\exists\ C \in \mathbb{R}$ mit $G = F + C$.

Beweis

($\Rightarrow$)

$G' = f = F' \implies (G-F)' = G' - F' = f - f = 0 \overset{15.29}{\Longrightarrow} G - F$ ist konstant.

($\Leftarrow$)

Sei $G = F + C\ ,\ C \in \mathbb{R} \implies G' = (F+C)' = F' = f$, d. h. G ist Stammfunktion von f.

□

15.32 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Vor: I sei ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion

Beh:

(a) (Satz über das unbestimmte Integral)
Die Funktion $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar und $F' = f$.
$(F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in I)$

(b) Sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \left[=: F(x)\Big|_a^b \right]$$

Beweis

(a)

Sei $x \in I$.
Für $h \neq 0$ und $x + h \in I$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{MWS d. IR}}{=} \frac{1}{h} f(\alpha_h)\overbrace{(x+h-x)}^{=h} = f(\alpha_h)\end{aligned}$$

mit $\alpha_h \in [x, x+h]$, falls $h > 0$, $\alpha_h \in [x+h, x]$, falls $h < 0$.
Daraus erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\alpha_h) \overset{f \text{ stetig}}{=} f\underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \alpha_h\right)}_{=x} = f(x)$$

(b)

Durch $G(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ ,\ x \in I$, wird nach (a) eine Stammfunktion von f definiert mit $G(a) = 0\ ,\ G(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Da F Stammfunktion von f ist, existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $F = G + C$.

Somit gilt:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - \underbrace{G(a)}_{=0} = \big(G(b) + C\big) - \big(G(a) + C\big) = F(b) - F(a)$$

□

15.33 Bemerkung (stetige Funktion – Stammfunktion)

Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.

Beweis

f stetig $\xrightarrow{15.32,(a)}$ $\exists\ F$ mit $F' = f$.

□

Problem: Finde zu einer Funktion f eine Funktion F mit $F' = f$.
(Ansätze dazu in § 16)

§ 16 Techniken des Integrierens

Zur Berechnung eines Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gibt es verschiedene Ansätze:

- Verwendung einer Stammfunktion (falls sie bekannt ist).
- Vereinfachung des Integrals durch Substitution. (KR)
- Vereinfachung des Integrals durch partielle Integration. (PR)
- Partialbruchzerlegung (für die Integration rationaler Funktionen).
- Numerische Integration (sehr wichtig in der Praxis).
  (kein Prüfungsstoff für Modulprüfung, sehr selten Prüfungsstoff für Staatsexamen)

Berechnen des Integrals mit Hilfe von Stammfunktionen

Nach dem Fundamentalsatz (Hauptsatz) der DIR (15.32, (b)) gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

wobei $F' = f$.
Aus Formeln für die Ableitung können manchmal direkt Formeln für Stammfunktionen abgeleitet werden.

16.1 Beispiel (Stammfunktion)

(a) Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $c \in \mathbb{R}$.
Für $F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) = \frac{c}{n+1} x^{n+1}$$

wobei $D = \mathbb{R}$ für $n \geq 0$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $n < -1$ gilt

$$F'(x) = c \cdot x^n$$

d. h. F ist Stammfunktion der Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = c \cdot x^n$$

Also gilt nach 15.32, (b)

$$\int_a^b c \cdot x^n\,\mathrm{d}x = \frac{c}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^b$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$; für $n < -1$ wird zusätzlich vorausgesetzt, dass $a, b > 0$ oder $a, b < 0$ sind. Mit obiger Formel und den Rechenregeln für Integrale erhält

man Stammfunktionen für Polynome.
Zum Beispiel (vgl. 15.26, (b)):

$$\int_{-2}^{2} 4 - x^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 4 \,\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} x^2 \,\mathrm{d}x = 4x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2}$$
$$= 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3\right) = \frac{32}{3}$$

(b) (i) Für $F\colon]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \ln(x)$, gilt

$$F'(x) = \frac{1}{x}$$

Wir erhalten also die Integrationsformel

$$\int_a^b \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a) \quad \text{für } b > a > 0$$

(ii) Für $F\colon]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \ln(-x)$, gilt

$$F'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Wir erhalten also die Integrationsformel

$$\int_a^b \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(-x)\Big|_a^b = \ln(-b) - \ln(-a) \quad \text{für } a < b < 0$$

Aus (i) und (ii) folgt

$$\int_a^b \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(|x|)\Big|_a^b = \ln(|a|) - \ln(|b|)$$

wobei entweder $b > a > 0$ oder $a < b < 0$ sind.

(c) Für $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \cos(x)$ gilt

$$F'(x) = -\sin(x)$$

Wir erhalten also die Integrationsformel

$$\int_a^b \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_a^b \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}\ ,\ a < b$$

Für $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \sin(x)$ gilt

$$F'(x) = \cos(x)$$

Wir erhalten also die Integrationsformel

$$\int_a^b \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(a)\Big|_a^b \quad \text{für } a,b \in \mathbb{R}\ ,\ a < b$$

(d) Für $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ F(x) = \exp(x)$ gilt

$$F'(x) = \exp(x)$$

Wir erhalten also die Integrationsformel

$$\int_a^b \exp(x) = \exp(x)\Big|_a^b \quad \text{für } a,b \in \mathbb{R}\ ,\ a < b$$

16.2 Satz (Substitutionsregel)

Vor:

- I Intervall
- $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion
- $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a,b]) \subset I$

Beh:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = (F \circ \varphi)(t)\Big|_a^b$$

wobei F Stammfunktion von f ist.

Beweis

f stetig, also existiert Stammfunktion $F\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ zu f. Die Funktion $F \circ \varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar (als Komposition differenzierbare Funktionen) und es gilt

$$(*) \quad (F \circ \varphi)'(t) = \Big(F(\varphi(t))\Big)' \overset{\text{KR}}{=} F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \overset{(*)}{=} (F \circ \varphi)(t)\Big|_a^b = (F \circ \varphi)b - (F \circ \varphi)a$$

$$= F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Vor:

- I Intervall
- $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion
- $\psi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion mit $\psi([a,b]) \subset I$
- $\psi'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

Beh:

$$\int_a^b g(\psi(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\cdot(\psi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\frac{1}{\psi'\big(\psi^{-1}(t)\big)}\,\mathrm{d}t$$

Beweis

Mit $\psi'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ folgt nach Ana I

$$\psi\colon [a,b] \longrightarrow \psi([a,b])$$

ist bijektiv, d. h. ψ^{-1} existiert. Mit (1) für $f = (g \circ \psi)$ und $\varphi = \psi^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b g(\psi(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{\psi^{-1}(\psi(a))}^{\psi^{-1}(\psi(b))} g)(\psi(x))\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(1),\leftarrow}{=} \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} (g\circ\psi)(\psi^{-1}(t))(\psi^{-1})'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)\,\underbrace{(\psi^{-1})'(t)}_{\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

16.3 Beispiel (Stammfunktion)

(a) $\int_a^b 2 \cdot t \cdot \exp(t^2)\,\mathrm{d}t = \ldots$

$f(x) = \exp(x) \quad , \quad \varphi(t) = t^2 \quad , \quad \varphi'(t) = 2t$

$$\int_a^b 2 \cdot t \cdot \exp(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \exp(x) = \exp(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$
$$= \exp\big(\varphi(t)\big)\Big|_a^b = \exp(t^2)\Big|_a^b$$

(b) $\int_a^b t \cdot e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int_a^b 2te^{t^2}} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{1}{2}e^{t^2}\Big|_a^b$

(c) $\int_a^b \sin^3(t) \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \ldots$

$f(x) = x^3 \quad , \quad \varphi(t) = \sin(t) \quad , \quad \varphi'(t) = \cos(t)$

$$\int_a^b \sin^3(t) \cdot \cos(t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} x^3\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}x^4\Big|_{\sin(a)}^{\sin(b)} = \frac{1}{4}\big(\sin^4(b) - \sin^4(a)\big)$$

Stammfunktion von $\sin^3(t) \cdot \cos(t)$ ist $\frac{1}{4}\sin^4(t)$.

(d) $\int_a^b \sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b 2\sin(2t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \ldots$

$f(x) = \sin(x) \quad , \quad \varphi(t) = 2t \quad , \quad \varphi'(t) = 2$

$$\frac{1}{2}\int_a^b 2\sin(2t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\big(-\cos(x)\big)\Big|_{2a}^{2b} = -\frac{1}{2}\cos(2b) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2a)\right)$$

Stammfunktion von $\sin(2t)$ ist $-\frac{1}{2}\cos(2t)$.

(e) $\int\limits_a^b (g(t))^n \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \ldots$

$f(x) = x^n \quad , \quad \varphi(t) = g(t) \quad , \quad \varphi'(t) = g'(t)$

$$\int\limits_a^b (g(t))^n \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int\limits_{g(a)}^{g(b)} x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \frac{1}{n+1}(g(t))^{n+1}\Big|_a^b$$

Stammfunktion von $(g(t))^n \cdot g'(t)$ ist $\frac{1}{n+1}(g(t))^{n+1}$.

16.4 Bemerkung (Stammfunktion)

Sei $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\int\limits_a^b \overbrace{g'(t) \cdot \frac{1}{g(t)}}^{(*)}\,\mathrm{d}t = \ln\left(|x|\right)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \underbrace{\ln\left(|g(t)|\right)}_{\text{Stammfunktion von } (*)}\Big|_a^b$$

Beweis

$\int\limits_a^b g'(t) \cdot \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \ldots$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad \varphi(t) = g(t) \quad , \quad \varphi'(t) = g'(t)$

$$\int\limits_a^b g'(t) \cdot \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int\limits_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|)\Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

□

16.5 Beispiel (Stammfunktion)

(a) Für $a, b > 0$ gilt

$$\int\limits_a^b \frac{t+2}{t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \frac{2t+4}{t^2+4t+2}\,\mathrm{d}t \overset{16.4}{=} \ldots$$

$g(t) = t^2 + 4t + 2 \quad , \quad g'(t) = 2t + 4 \quad , \quad g(t) > 0 \text{ für } t \geq 0$

$$\frac{1}{2} \int_a^b \frac{2t+4}{t^2+4t+2} \, \mathrm{d}t \overset{16.4}{=} \frac{1}{2} \ln\big(g(t)\big) \Big|_a^b$$

(b) Sei $[a, b] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dann gilt

$$\int_a^b \tan(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \, \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \tan(t) \, \mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \, \mathrm{d}t \\ &= -\int_a^b -\sin(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} \, \mathrm{d}t \overset{16.4}{=} \dots \end{aligned}$$

$g(t) = \cos(t) \quad , \quad g'(t) = -\sin(t) \quad , \quad g(t) > 0 \quad \forall\, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$-\int_a^b -\sin(t) \cdot \frac{1}{\cos(t)} \, \mathrm{d}t \overset{16.4}{=} \underbrace{-\ln\big(\cos(t)\big)}_{\text{Stammfunktion von } \tan(t)} \Big|_a^b$$

16.6 Bemerkung (Stammfunktion)

$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, F sei die Stammfunktion von f und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a)
$$\int_a^b f(c+x) \, \mathrm{d}x = F(c+x) \Big|_a^b$$

(b)
$$\int_a^b f(c-x) \, \mathrm{d}x = -F(c-x) \Big|_a^b$$

(c)
$$\int_a^b f(-x) \, \mathrm{d}x = -F(-x) \Big|_a^b$$

Beweis

(a) $\int_a^b f(c+x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

$g = f \quad , \quad \psi(x) = c + x) \quad , \quad \psi'(x) = 1$, d. h. $\frac{1}{\psi'\left(\psi^{-1}(t)big\right)} = \frac{1}{1} = 1$

$$\int_a^b f(c+x)\,\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \int_{c+a}^{c+b} f(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_{c+a}^{c+b}$$
$$= F(c+t)\Big|_a^b$$

(b) $\int_a^b f(c-x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

$g = f \quad , \quad \psi(x) = c - x \quad , \quad \psi'(x) = -1$, d. h. $\frac{1}{\psi'\left(\psi^{-1}(t)\right)} = \frac{1}{-1} = -1$

$$\int_a^b f(c-x)\,\mathrm{d}x = \int_{c-a}^{c-b} f(t)\cdot(-1)\,\mathrm{d}t = -F(t)\Big|_{c-a}^{c-b}$$
$$= -F(c-x)\Big|_a^b$$

(c) Folgt aus (b) für $c = 0$.

□

16.7 Satz (Symmetrie – Stammfunktion)

Vor: $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion und $c \in \mathbb{R}$. f sei symmetrisch bzgl. c (punktsymmetrisch), d. h.

$$f(c+x) = -f(c-x)$$

Beh: Für $r \in \mathbb{R}$ mit $[c-r, c+r] \subset I$ gilt

$$\int_{c-r}^{c+r} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Beweis

$$\int_{c-r}^{c+r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} f(c+x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\S\,14}{=} \int_{-r}^{0} f(c+x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{r} \underbrace{f(c+x)}_{\substack{f \text{ symm. bzgl. } c \\ = \\ -f(c-x)}}\,\mathrm{d}x$$

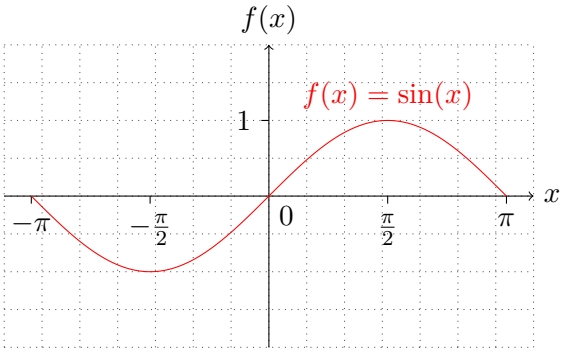
$$= \int_{-r}^{0} f(c+x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{r} f(c-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\substack{F \text{ SF} \\ \text{von } f}}{=} F(c+x)\Big|_{-r}^{0} - \left(-F(c-x)\Big|_{0}^{r}\right)$$

$$= F(c) - F(c-r) - \big(-F(c-r) + F(c)\big) = 0$$

□

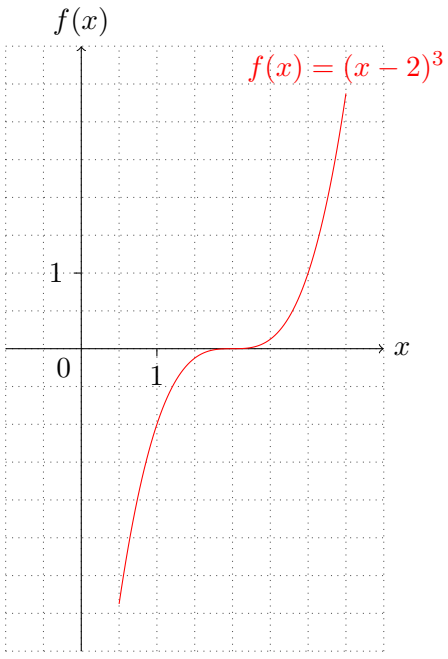
Beispiel 1



Beispiel 2

$f(x) = x^3 - 6x + 12x - 8 = (x-2)^3$

x	2	1	3	0	4
$f(x)$	0	-1	1	-8	8



16.8 Beispiel (Stammfunktion)

Beh:

$$\int_{-3}^{3} x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Beweis

Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$. Dann gilt

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) \overset{\text{Ana I}}{=} x^2(-\sin(x)) = -f(x)$$

d. h. f ist symmetrisch bzgl. 0. Mit 16.7 folgt die Behauptung.

□

16.9 Beispiel („Mechanische" Ausführung der Substitution)

$$\int_a^b \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{NR}}{=} \frac{1}{4}\sin^4(x)\Big|_a^b$$

NR: $u = \varrho(x) = \sin(x) \quad , \quad \varrho'(x) = \cos(x)$
Ansatz: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$
Daraus folgen

(1) $\mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \underbrace{\sin^3(x)}_{u}\underbrace{\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} \rightsquigarrow \int u^3\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u^4 \rightsquigarrow \frac{1}{4}\sin^4(x)$

16.10 Beispiel (Stammfunktion)

$$\int_0^2 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{NR}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} e^u 2u\,\mathrm{d}u \overset{?}{=} \ldots$$

NR: $u = \varrho(x) = \sqrt{x}\ ,\ \varrho'(x) = \frac{1}{2}$
Ansatz: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varrho'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$
$\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$

16.11 Vorüberlegung

Es gilt nach der PR

$$(\underbrace{f \cdot g}\,)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

d. h. $f \cdot g$ ist Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$.

16.12 Satz (Partielle Integration)

Vor: $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbare Funktionen.

Beh: $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$

Beweis

Aus $f \cdot g$ Stammfunktion von $f'g + fg'$ folgt

$$\int_a^b \left[(f' \cdot g)(x) + (f \cdot g')(x)\right] \mathrm{d}x = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b$$

Daraus folgt

$$\int_a^b (f \cdot g')(x)\,\mathrm{d}x = (f \cdot g)(x)\Big|_a^b - \int_a^b (f' \cdot g)(x)\,\mathrm{d}x$$

□

16.13 Beispiel (Stammfunktion)

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}\ ,\ a, b > 0$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \underbrace{1}_{=g'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=f(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\ln(x)}_{=f(x)} \cdot \underbrace{x}_{=g(x)}\Big|_a^b - \int_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{1}{x}}_{=f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{=g(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x)\Big|_a^b - x\Big|_a^b = \underbrace{x\big(\ln(x) - 1\big)}_{\text{Stammfunktion von } \ln(x)}\Big|_a^b\end{aligned}$$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}\ ,\ a, b > 0$.

$$\begin{aligned}\int_a^b \underbrace{x^2}_{g'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(x)\Big|_a^b - \frac{1}{9}x^3\Big|_a^b \\ &= \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)\Big|_a^b\end{aligned}$$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f(x)} \,\mathrm{d}x = \underbrace{-\cos(x)}_{=g(x)} \underbrace{\cos(x)}_{=f(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\big(-\sin(x)\big)}_{=f'(x)} \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{=g(x)} \,\mathrm{d}x$$

$$= -\cos^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Daraus folgt

$$2\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)\Big|_a^b$$

d. h.

$$\int_a^b \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos^2(x)\Big|_a^b$$

(d) *Fortsetzung von Beispiel 16.10*

$$\int_a^b e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Subs.}}{\underset{\psi(x)=\sqrt{x}}{=}} \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \underbrace{e^t}_{=g'(t)} \underbrace{2t}_{=f(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} 2te^t\Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)} - \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \underbrace{e^t}_{=g(t)} \cdot \underbrace{2}_{=f'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2te^t\Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)} - 2e^t\Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)} = 2e^t(t-1)\Big|_{\psi(a)}^{\psi(b)}$$

$$\overset{\text{Resubs.}}{=} \underbrace{2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}_{\text{Stammfunktion von } e^2\cdot 2x \text{ und } e^{\sqrt{x}}}\Bigg|_a^b$$

16.14 Bemerkung zur numerischen Integration

(a) Stammfunktion zu

(i) e^x ist e^x.

(ii) $2xe^{x^2}$ ist e^{x^2}.

(iii) $e^{\sqrt{x}}$ ist $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)$.

(b) zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = e^{-x^2}$$

ist KEINE elementare Stammfunktion bekannt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{\pi}$$

$\int_a^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ heißt **Gaußsches Fehlerintegral**. Es wird mit numerischen Methoden (annähernd) berechnet.

Korrektur und Ergänzung zu 16.13,(d)

(1) $\int_a^b e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \ldots = 2e^{\sqrt{x}}\,(\sqrt{x}-1)\Big|_a^b$

$$\Longrightarrow \boxed{2e^{\sqrt{x}}\,(\sqrt{x}-1) \quad \text{ist Stammfunktion von } e^{\sqrt{x}}}$$

(2) $\int_c^d e^t 2t\,\mathrm{d}t = \ldots = 2e^t(t-1)\Big|_c^d$

$$\Longrightarrow \boxed{2e^x(x-1) \quad \text{ist Stammfunktion von } e^x \cdot 2x}$$

Probe zu (1):

$$\left(\underbrace{2e^{\sqrt{x}}}_{=f(x)}\underbrace{(\sqrt{x}-1)}_{=g(x)}\right)' = \underbrace{\underbrace{2e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{f'(x)}\underbrace{(\sqrt{x}-1)}_{g'(x)}}_{=e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} + \underbrace{\underbrace{2e^{\sqrt{x}}}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{g'(x)}}_{=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Probe zu (2):

$$\big(2e^x(x-1)\big)' = 2e^x(x-1) + 2e^x = 2xe^x$$

Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung)

16.15 Allgemeine Überlegungen

Eine rationale Funktion ist von der Form

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

wobei P und Q Polynome sind und $D = \Big\{x \in \mathbb{R} \ \Big|\ Q(x) \neq 0\Big\}$.

Vorgehen:

(1) Schritt:
Ist $\deg(P) \geq \deg(Q)$, so führt man eine Polynomdivision durch. Man erhält:

$$f(x) = P_0(x) + \frac{R(x)}{S(x)}$$

mit P_0, R und S Polynome, wobei $\deg(R) < \deg(S)$.

(2) Schritt:
Man bestimme die Nullstelle von $S(x)$.
Man erhält:

$$S(x) = (x - c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{k_r} \cdot q_1(x)^{s_1} \cdot \ldots \cdot q_l(x)^{s_l}$$

wobei $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ und $q_1(x), \ldots, q_l(x)$ unzerlegbare quadratische Polynome sind.

(3) Schritt:
Nach einer Partialbruchzerlegung (vgl. Analysis I, §5) braucht man Stammfunktionen zu Funktionen folgender Art:

$$\frac{A}{(x-c)^k}$$

mit $A, c \in \mathbb{R}$ und

$$\frac{Bx + C}{x^2 + ax + b}$$

mit $a, b, B, C \in \mathbb{R}$.

Wichtige (einfache) Funktionen

Sollte man sich merken!!

(a) Ist $c \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\int \frac{1}{x-c}\,\mathrm{d}x = \ln(|x-c|) + C$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan(t) + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} + C$

16.16 Beispiel (Integral)

Berechne das Integral

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

wobei $-1, 1 \notin [a, b]$.
Wegen $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ versucht man $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ derart zu finden, dass

$$(*) \quad \frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

(vgl. Analysis I, §5)
Ansatz:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha(1+x) + \beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(\alpha-\beta)x + (\alpha+\beta)}{(1-x)(1+x)}$$

Man erhält die Gleichungen

$$\alpha - \beta = 0\ ,\ \alpha + \beta = 1$$

d. h. $\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ \beta = \frac{1}{2}$
Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{(*)}{=} \int_a^b \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\ln(|1-x|)\Big|_a^b + \ln(|1+x|)\Big|_a^b\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)\Big|_a^b\end{aligned}$$

16.17 Beispiel (Integral)

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Berechne $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Es gilt: $(x^3 - x^2 + x - 1) : (x-1) = x^2 + 1 \implies x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$
Ansatz:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1}$$

Man erhält:

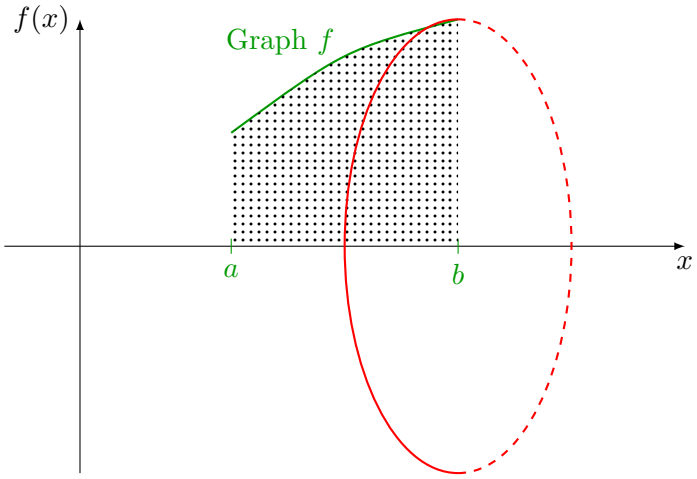
$$(\alpha+\beta)x^2 + (\gamma-\beta)x + (\alpha-\gamma) = 1$$

d. h. $\alpha + \beta = 0\ ,\ \gamma - \beta = 0\ ,\ \alpha - \gamma = 1$
. . . Rest ist Übungsaufgabe.

Rotationskörper

16.18 Rotationskörper

Rotiert eine Fläche, die im Intervall $[a, b]$ zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse liegt um die x-Achse, so erzeugt die Fläche bei einer Umdrehung von 360° einen symmetrisch zur x-Achse liegenden Rotationskörper.



Die Kreisscheiben mit Radius $f(x)$ haben die Fläche $\pi \cdot f^2(x)$.

16.19 Satz (Volumen eines Rotationskörpers)

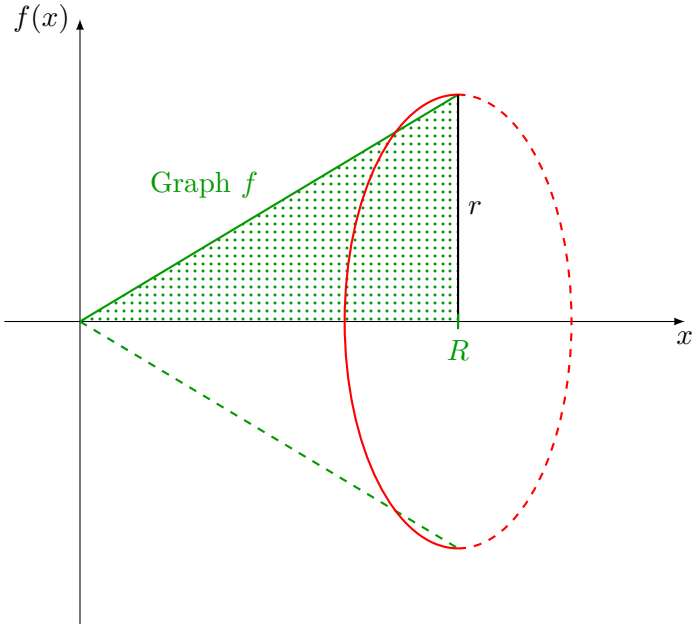
(Folgt aus dem Cavalierischen Prinzip)

Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion.

Beh: Für das Volumen des Rotationskörpers bzgl. f und der x-Achse gilt:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

16.20 Beispiel (Volumen eines Kreiskegels)



h sei die Höhe des Kegels, r sei der Raius der Grundfläche.

Wie erhält man f?

f ist eine Gerade mit $f(0) = 0$ und Steigung $\frac{r}{h}$.
Also erhält man:

$$f\colon [0,h] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \frac{r}{h}\,x$$

Mit 16.19 folgt

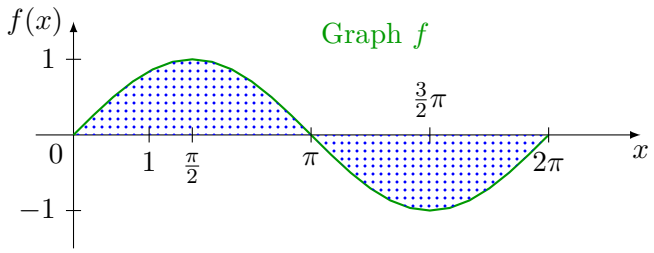
$$V_x = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h}\,x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}\,x^3\Big|_0^h = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2}_{\text{Grundfläche}} \cdot h$$

16.21 Beispiel (Volumen einer Rotationskörpers)

Gegeben sei die Funktion

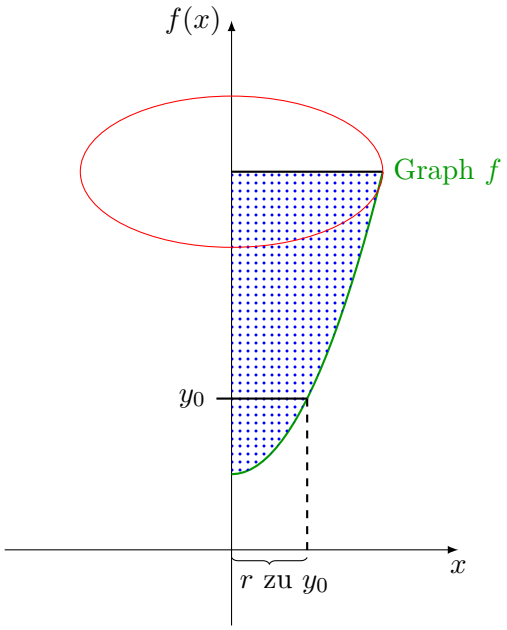
$$f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sin(x)$$

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers bzgl. f und der x-Achse.



$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{FS}}{=} \frac{1}{2}\pi(x - \sin(x)\cdot\cos(x))\Big|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\pi(2\pi - \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\cdot\cos(2\pi) - \underbrace{\frac{1}{2}\pi(0 - \sin(0)\cdot\cos(0))}_{=0} = \pi^2$$

16.22 Rotation bzgl. der y-Achse



Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der y-Achse rotiert um die y-Achse; $r = f^{-1}(y)$.

16.23 Satz (Folgt wieder aus dem Cavalierischen Prinzip)

Vor: $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine streng monotone und differenzierbare Funktion mit $f([a,b]) = [c,d]$. $f^{-1}\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ sei die Umkehrfunktion zu f.

Beh: Für das Volumen des Rotationskörpers bzgl. f und der y-Achse gilt

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d \left(f^{-1}(y)\right)^2 \mathrm{d}y \overset{(*)}{=} \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

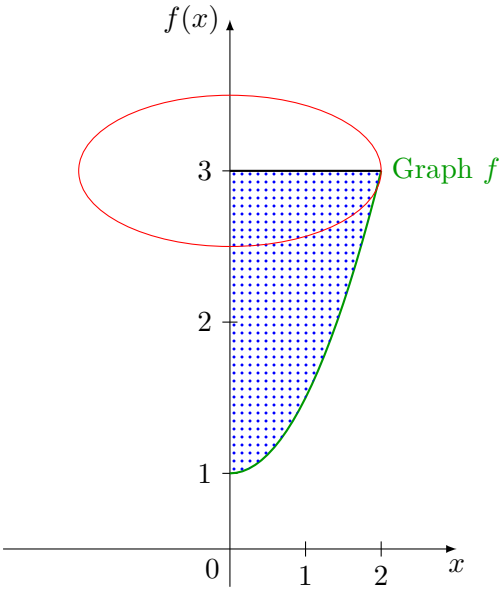
$(*)$: Substitution $\psi(y) = f^{-1}(y)$; $(\psi^{-1})'(y) = f'(y)$

16.24 Beispiel (Volumen eines Rotationskörpers)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Zu berechnen ist das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Graphen von f um die y-Achse entsteht.



Es gilt: $\left(f^{-1}(y)\right)^2 \overset{\text{Auflösen nach } x^2}{=} 2(y-1)$

1. Variante

$$V_y \overset{16.23}{=} \pi \cdot \int_1^3 2(y-1)\,\mathrm{d}y = 2\pi \left(\frac{1}{2}y^2 - y\right)\Big|_1^3 = 4\pi$$

2. Variante: $f'(x) = x$. Mit 16.23 folgt

$$V_y = \pi \cdot \int_0^2 x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{1}{4}x^4\Big|_0^2 = 4\pi$$

16.25 Wichtige Stammfunktionen

folgende Integrale sollte man auswendig wissen! $\rightsquigarrow$ *Modulprüfung*
Staatsexamen: siehe Formelsammlung, z. B. Barth u. a.

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \; n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$$
$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad , \; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \; , \; x > 0$$
$$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$
$$\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = -\cot(x) + C$$
$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$
$$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad , \; a > 0 \; , \; a \neq 1$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$
$$\int \tan(x) \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$
$$\int \ln(x) \,\mathrm{d}x = -x + x\ln(x) + C \quad , \; x > 0$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad , \; a \neq 0$$

16.26

Zur Frage von gestern:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\frac{1}{2}t^2+1} \,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(t^2+2)} \,\mathrm{d}t &= 2 \cdot \int \frac{1}{t^2+2} \,\mathrm{d}t \\ &\overset{a=\sqrt{2}}{=} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= \sqrt{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C\end{aligned}$$

§ 17 Uneigentliche Integrale, Integralvergleichskriterium

Idee: Konvergenz oder Divergenz von (unendlichen) Reihen mit Hilfe von „uneigentlichen Integralen“ nachweisen.

17.1 Definition (Uneigentliches Integral)

Es sei $a \in \mathbb{R}$.

(i) $f\colon [a,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die über jedem Intervall $[a,R]$, $a < R < \infty$, integrierbar ist.
Existiert

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

so heißt $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ **konvergent** und man definiert

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) Analog definiert man für $f\colon (-\infty,a] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

(iii) $f\colon]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die über jedem Intervall $[-R,R]$, $R \in \mathbb{R}$, integrierbar ist. Man definiert

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

falls die beiden Grenzwerte existieren.

17.2 Beispiel (konvergent bzw. divergent)

$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x$ ist für $s > 1$ konvergent und für $s \le 1$ divergent.

Beweis

[Fo1], §20.

□

17.3 Satz (konvergent)

Vor: $f\colon [1,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ sei eine monoton fallende Funktion.

Beh: $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ ist konvergent $\iff$ $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ist konvergent.

Beweis

[Fo1], §20

□

Aus 17.2 folgt mit 17.3:

17.4 Bemerkung (vgl. Analysis I, 5.25)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \begin{cases} \text{ist konvergent für} & s > 1 \\ \text{ist divergent für} & 0 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

§ 18 Potenzreihen

18.1 Staatsexamensaufgaben

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2nn}{x}^n$$

(b) Man untersuche die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^2 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n \cdot 9^n} \quad , x \in \mathbb{R}$$

auf Konvergenz.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) x^n$$

und stellen SIe diese Reihen als rationale Funktionen dar.

(d) Entwicklen Sie die Funktion

$$f\colon]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto \frac{1}{x}$$

an der Stelle 2 in eine Taylorreihe und geben Sie das Konvergenzintervall dieser Reihe an.

18.2 Definition (Potenzreihe, Koeffizienten)

Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad , \ c_n, a \in \mathbb{R} \ , \ k \in \mathbb{N}$$

heißt **Potenzreihe** (um den Entwicklungspunkt a), die c_n heißen **Koeffizienten** der Potenzreihe.

Sei $D := \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle| \ \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergent} \right\}$.

Durch $f(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n$ wird eine Funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert.

18.3 Notiz

Wegen

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n (a-a)^n = \begin{cases} 0 & \text{, für } k \geq 1 \\ c_0 & \text{, für } k = 0 \end{cases}$$

ist die Menge D aus 18.2 NICHT leer, $a \in D$.

18.4 Beispiel (Potenzreihe als Funktion)

Durch die Potenzreihe

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ $(\text{d. h. } c_n = 1 \quad \forall\ n\ ,\ a = 0)$
  wird eine Funktion auf $D =]-1, 1[$ definiert (unendliche geometrische Reihe, Ana I).
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ $\left(\text{d. h. } c_n = \frac{1}{n!} \quad \forall\ n\ ,\ a = 0\right)$
  wird eine Funktion auf $D = \mathbb{R}$ definiert (Exponentialfunktion, Ana I).
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ mit

$$c_m = \begin{cases} 0 & \text{, für } m \text{ unegrade} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m!} & \text{, für } m \text{ gerade} \end{cases} \quad ,\ a = 0$$

  wird eine Funktion auf $D = \mathbb{R}$ definiert (Cosinusfunktion, Ana I).

18.5 Definition (Konvergenzradius)

Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n$ heißt

$$r := \sup \left\{ (x-a) \quad \middle| \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergent} \right\}$$

mit $r \in [0, \infty[\cup \{\infty\}$, **Konvergenzradius** der Potenzreihe; dabei wird $r = \infty$ gesetzt, wenn

$$\left\{ (x-a) \quad \middle| \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergent} \right\}$$

NICHT beschränkt ist.

18.6 Notiz

Wegen

$$\begin{aligned} r &= \sup \left\{ (x-a) \quad \middle| \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergent} \right\} \\ &= \left\{ |z| \quad \middle| \quad z \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \text{ konvergent} \right\} \\ &= \left\{ (x-a) \quad \middle| \quad x \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergent}\ ,\ c_n \text{ wohldefiniert} \right\} \end{aligned}$$

kann man sich bei **Konvergenzbetrachtungen** von Potenzreihen auf die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

beschränken (vorausgesetzt $c_0, c_1 \ldots$ wohldefiniert).

18.7 Definition (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

$D \subset \mathbb{R}$, $f_n \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** gegen eine Funktion $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in D$$

d. h.: zu jedem $x \in D$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$|f_n(x) - f(x) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$$

(b) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funtion $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon \in \mathbb{N} :\ |f > n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D\ ,\ \forall\, n \geq N$$

18.8 Satz (absolute Konvergenz)

Vor: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n(x-a)^n$ sei eine Potenzreihe und r ihr Konvergenzradius.

Beh:

(a) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n(x-a)^n$ **konvergiert absolut** für

$$\begin{cases} x = a & \text{, wenn } r = 0 \\ \forall\, x \in]a-r, a+r[& \text{, wenn } 0 < r < \infty \\ \forall\, x \in \mathbb{R} & \text{, wenn } r = \infty \end{cases}$$

(b) Ist $r < \infty$, so divergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n(x-a)^n$ für alle $x \notin [a-r, a+r]$, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > r$.

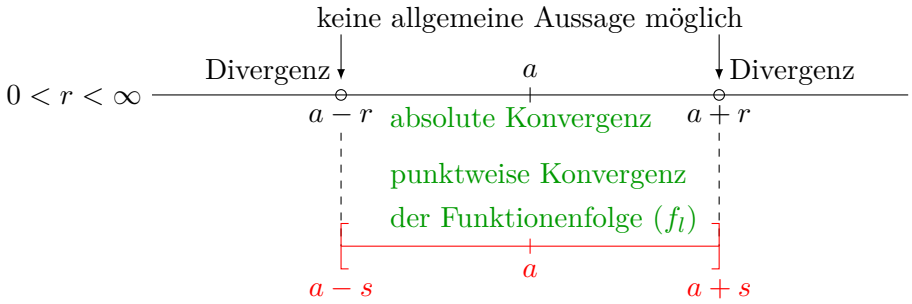
(c) Sei $0 < s < r$. Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$(f_l)_{l\geq k}\ ,\ f_l(x) = \sum_{n=k}^{l} c_n(x-a)^n$$

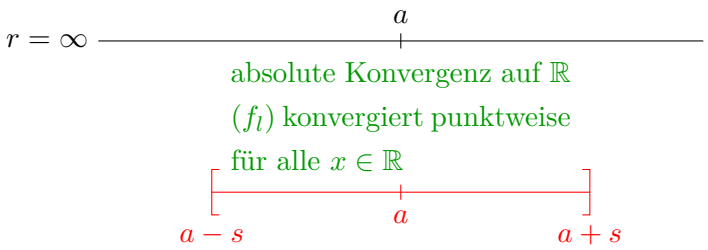
gleichmäßig gegen die Funktion

$$f \colon [a-s, a+s] \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

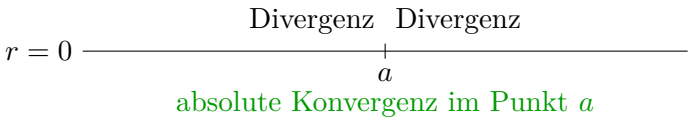
Skizzen zu 18.8



(f_l) konvergiert gleichmäßig



(f_l) konvergiert gleichmäßig auf allen beschränkten Intervallen



18.9 Definition (Limes superior)

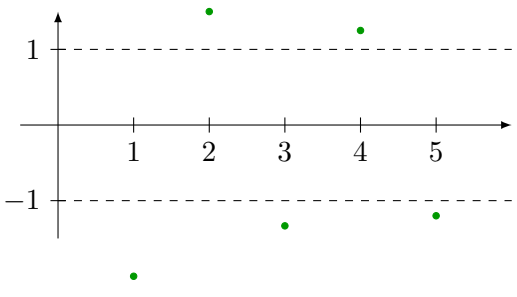
$(a_n)_{n \geq k}$ sei eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup \left\{ a_l \;\middle|\; l \geq n \geq k \right\} \right)$$

Limes superior der Folge (a_n).

18.10 Beispiel (Limes superior)

$A_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ $\left(\rightsquigarrow\ a_1 = -2\ ,\ a_2 = \frac{3}{2}\ ,\ a_3 = -\frac{4}{3} \ldots\right)$



(a_n) ist divergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert NICHT.

$$\sup\left\{a_l \;\middle|\; l \geq 1 \geq 1\right\} = a_2 = \tfrac{3}{2}$$
$$\sup\left\{a_l \;\middle|\; l \geq 2 \geq 1\right\} = \tfrac{3}{2}$$
$$\sup\left\{a_l \;\middle|\; l \geq 3 \geq 1\right\} = \tfrac{5}{4}$$

$$\sup\left\{a_l \;\middle|\; l \geq n \geq 1\right\} = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n} & \text{, für } n \text{ gerade} \\ 1 + \dfrac{1}{n+1} & \text{, für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 1$

18.11 Bemerkung (Limes Superior)

Ist (a_n) eine konvergente Folge, so ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

18.12 Satz (Formeln für die Bestimmung des Konvergenzradius)

Vor: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n(x-a)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Wir definieren in diesem Satz: $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$

Beh:

(a) (Cauchy-Hadamard Wurzelkriterium)

$$r = \frac{1}{L}\ , \text{ wobei } L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0,\infty] \cup \{\infty\}$$

(b) (Euler Quotientenkriterium)
Ist $c_n \neq 0$ für alle $n \geq N \in \mathbb{N}$ und existiert $q := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ bzw. ist $q = \infty$, so gilt

$$r = \frac{1}{q}$$

18.13 Beispiel (Konvergenz)

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$

$\rightsquigarrow$ Konvergenzradius für $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ bereits bekannt, nämlich $r = 1$;
Es gilt

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \overset{18.12,(b)}{\Longrightarrow} r = \frac{1}{q} = 1$$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
$\rightsquigarrow$ Konvergenzradius bekannt

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \overset{18.12,(b)}{\Longrightarrow} r = \underbrace{\frac{1}{0} = \infty}_{\text{nur im Satz 18.12!}}$$

(c) Lösung zu 18.1,(a)
Gegeben ist die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$. Gesucht ist der Konvergenzradius.
Es gilt:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 4$$

$\overset{18.12,(b)}{\Longrightarrow} r = \frac{1}{4}$

(d) Lösung zu 18.1,(b),(ii)
Man untersuche folgende Potenzreihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n \cdot 9^n} \quad \left(c_n = \frac{1}{n \cdot 9^n}\ ,\ a = -7\ ,\ k = 1\right)$$

Es gilt:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n \cdot 9^n}{(n+1)9^{n+1}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{9}$$

$\overset{18.12,(b)}{\Longrightarrow} r = 9$
Somit gilt nach 18.8:

$$(\alpha) \begin{cases} \text{Potenzreihe konvergiert} & \text{für } x \in]-7-9, -7+9[=]-16, 2[\\ \text{Potenzreihe divergiert} & \text{für } x \notin [-16, 2] \end{cases}$$

Verhalten der Potenzreihe in den Randpunkten -16 und 2:
(β) Sei $x = -16$; dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n \cdot 9^n} = \sum \frac{(-9)^n}{n \cdot 9^n} = \sum (-1)^n \frac{1}{n} \left(= -\ln(2)\right)$$

die Potenzreihe konvergiert nach Leibnitz-Kirterium. (γ) Sei $x = 2$; dann gilt

$$\sum \frac{(x+7)^n}{n \cdot 9^n} = \sum \frac{9^n}{n \cdot 9^n} = \sum \frac{1}{n}$$

die Reihe divergiert.
$(\alpha), (\beta), (\gamma) \implies$ Potenzreihe konvergiert für $x \in [-16, 2[$ und divergent für $x \in]-\infty, -16[\cup [2, \infty[$.

(e) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n}$$

IRRWEG: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim n \to \infty \frac{2^n}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\rightsquigarrow$ Konvergenzradius$= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$
Ergebnis ist FALSCH!!!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^{3n}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \text{ mit } c_m = \begin{cases} 0 & \text{, für } 3 \nmid m \\ \frac{1}{2^{\frac{m}{3}}} & \text{, für } 3 \mid m \end{cases}, \ m \geq 1$$

Somit gilt:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|c_m|} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\frac{1}{2^{\frac{m}{3}}}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$\overset{18.12.(a)}{\Longrightarrow}$ $r = 2^{\frac{1}{3}} \approx 1,26$ ist der Konvergenzradius obiger Potenzreihe.

Alternative Lösung 1:
Substituiere $z = x^3$ (d. h. $x = \sqrt[3]{z}$)
Wir erhalten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n$$

$\rightsquigarrow$ Konvergenzradius $r_z = 2$
$r_z = 2 \iff$ Konvergenz $\forall\, z\colon |z| < 2 \iff$ Konvergenz $\forall\, x\colon |x^3| < 2$
$\iff$ Konvergenz $\forall\, x\colon |x|^3 < 2 \iff$ Konvergenz $\forall\, x\colon |x| < \sqrt[3]{2} \iff r_x = \sqrt[3]{2}$.

Alternative Lösung 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{3n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^n}_{(*)}$$

$(*)$ konvergent $\overset{\text{UGR}}{\iff} \left|\frac{x^3}{2}\right| < 1 \iff |x|^3 < 2 \iff |x| < \sqrt[3]{2} \iff -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$
$\Longrightarrow$ Konvergenzradius $r = \sqrt[3]{2}$

18.14 Satz (gleichmäßige Konvergenz – Stetigkeit)

Vor: $D \subset \mathbb{R}$, $f_n\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergieren.

Beh: f ist stetig.

18.15 Satz (gleichmäßige Konvergenz)

Vor: $d \subset \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergieren.

Beh:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

18.16 Satz (gleichmäßige Konvergenz – Differenzierbarkeit)

Vor: $f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig differenzierbare Funktionen. Die Folge $(f_n)_n$ konvergiere punktweise gegen $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Funktionenfolge $(f_n')_n$ konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$.

Beh: f ist differenzierbar und $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$.

18.17 Satz (Konvergenz)

Vor: $f(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} c_n (x-a)^n$ sei eine Potenzreihe, $k \in \mathbb{N}$, mit Konvergenzradius $r > 0$, $I := [a-r, a+r[$ und

$$g(x) := \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} & \text{, für } k = 0 \\ \sum\limits_{n=k}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} & \text{, für } k \geq 1 \end{cases}$$

Beh:

(a) Der Konvergenzradius ist gleich r, d. h. durch $g(x)$ wird eine Funktion

$$g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert.

(b) g konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[a-s, a+s]$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $0 < s < r$.

(c) $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in I$ $\quad \Big(\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \Big)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \Big)$

(d) $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar und $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Beweis

[Fo1]

□

18.18 Beispiel (Konvergenz)

(a) Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , \ x \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$f'(x) \overset{18.17}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = f(x)$$

(Wie bereits bekannt: $\big(\exp(x)\big) = \exp(x)\big)$

(b) Gegeben: Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$.
Gesucht: Konvergenzradius r und die durch die Potenzreihe definierte rationale Funktion.

(i) Konvergenzradius (siehe 18.13,(a)): $r = 1$

(ii) Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \ |x|x < 1$$

Beweis ((b),(ii))

Für $|x| < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \overset{\text{Ana I}}{=} \frac{1}{1-x}$.

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \overset{18.17}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{(-1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (*)$$

Daraus folgt für $|x| < 1$:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} nx^n}_{\text{Konvergenz nach (i)}} = \underbrace{0 \cdot x^0}_{=0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nx^n}_{\text{Konvergenz nach (i)}} = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\overset{(*)}{=} x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

□

18.19 Definition (Taylorreihe)

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die **Taylorreihe** von f mit Entwicklungspunkt a.

18.20 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Entwickeln Sie die Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle 2 in eine Taylorreihe.
Lösung

$$\exp(x) = \exp(x-2+2) \overset{\text{Ana I}}{=} \exp(2)\cdot\exp(x-2) = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Wegen $\frac{1}{n!}\exp^{(n)}(2) = \frac{1}{n!}\exp(2) = \frac{e^2}{n!}$ folgt mit Definition 18.19 die Behauptung.

18.21 Satz (Stammfunktion)

Vor: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.

Beh: f hat auf $]a-r, a+r[$ eine Stammfunktion und es gilt

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1} \quad \forall\ x \in]a-r, a+r[$$

18.22 Satz (identische Funktionen)

Vor: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k(x-a)^k$ seien Potenzreihen, die im offenen Intervall I um a konvergieren.

Beh: Stimmen f und g auf irgendeiner Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(x_n \neq a)$ überein, d. h. $f(x_n) = g(x_n) \quad \forall\ n \geq 1$, so sind beide Funktionen identisch, d. h.

$$f(x) = g(x) \quad \forall\ x \in I \quad \text{und} \quad c_k = d_k \quad \forall\ k$$

18.23 Satz (Abelscher Grenzwertsatz)

Vor: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, $r < \infty$.

Beh: $f(x)$ ist im Punkt $a+r$ konvergent $\Longrightarrow$ f ist im Punkt $a+r$ linksseitig stetig $\left(\text{d. h. } \lim_{x \nearrow a+r} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^n\right)$

Bemerkung: Analog für Konvergenz in $a-r$, f rechtsseitig stetig.

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Literatur:

Fo2 Forster: Analysis 2, §§ 1-7.

HM Burg, u. a.: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band I, Analysis, Kapitel 6

(Beide Bücher als E-Book vorhanden)

- Studium von Folgen im $\mathbb{R}^n$ und von Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supset X \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \ n, m \geq 1$$

- Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit, Differenzierbarkeit u.s.w. werden so erweitert (verallgemeinert), dass sie für $n = m = 1$ mit den bekannten Definitionen übereinstimmen.
- **!! $\mathbb{R}^n$ ist KEIN Körper !!**
- Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir KEINE Anordnungsaxiome.
- R^n ist ein Vektorraum mit Skalenkörper $\mathbb{R}$
- Addition auf $\mathbb{R}^n$: $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
  $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$
- Abstände zwischen zwei Elementen des $\mathbb{R}^n$ werden über eine Norm definiert (entspricht dem Betrag).

§ 19 Folgen im $\mathbb{R}^n$

19.1 Definition (Norm)

Die Abbildung

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{=x} \longmapsto \|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

heißt **Norm** auf $\mathbb{R}^n$. $\|x\|$ heißt Norm oder Länge von x.

Bemerkung: $n = 1$: $\|x\| = \|(x_1)\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$

19.2 Bemerkung (Eigenschaften der Norm)

Die Norm hat folgende Eigenschaften:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0.$ $\qquad \left[x = \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n\text{-mal}} \right]$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$

(N3) (Dreiecksungleichung) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}^n$

Beweis

siehe LAGeo.

□

19.3 Bemerkung (Norm)

(a) $\forall \ x, y \in \mathbb{R}^n$: $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$
Bemerkung: für Abschätzungen nützlich

(b) Für $k \in \mathbb{N}^* \ , \ v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|$$

(c) Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt für jedes $l \in \{1, \ldots, n\}$:

$$|x_l| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

Beweis

Übungsaufgabe.

□

19.4 Definition (Abstand, Metrik)

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\mathrm{d}(x,y) := \|x - y\|$$

der **Abstand** von x und y. Ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, so gilt:

$$\mathrm{d}(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Die Abbildung

$$\mathrm{d}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ (x,y) \longmapsto \mathrm{d}(x,y)$$

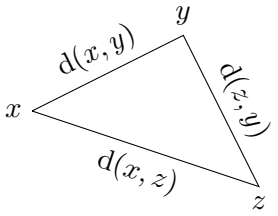
wird auch **Metrik** genannt.

19.5 Bemerkung (Dreiecksungleichung)

(a) $\mathrm{d}(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
$\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$

(b) $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

(c) (Dreiecksungleichung) $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(z,y) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$
Skizze im $\mathbb{R}^2$:



Beweis

Folgt aus den Eigenschaften der Norm.

□

19.6 Definition (Folge im $\mathbb{R}^n$)

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$a\colon \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; k \geq k_0 \right\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \ k \longmapsto a(k)$$

heißt **Folge im** $\mathbb{R}^n$ und wird in der Form $(a_k)_{k \geq k_0}$ geschrieben.

19.7 Beispiel (Folge im $\mathbb{R}^n$)

$\left(\dfrac{k}{k+1} \ , \ \left(1 + \dfrac{2}{k}\right)^k \right)_{k \geq 1}$ ist eine Folge im $\mathbb{R}^2$.

19.8 Definition (konvergent, Grenzwert, divergent)

(a) $(a_k)_{k\geq k_0}$ sie eine Folge im $\mathbb{R}^n$.
Die Folge heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}^n$ $\left(\text{Symbole: } \lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \text{ oder } a_k \longrightarrow a\right) :\Longleftrightarrow$
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$, $K \geq k_0$, derart, dass $\underbrace{\|a_k - a\|}_{=\mathrm{d}(a_k,a)} < \varepsilon \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$, $k \geq K$.
$a \in \mathbb{R}^n$ heißt **Grenzwert** der (konvergenten) Folge (a_k).

(b) $(a_k)_{k\geq k_0}$ heißt **divergent**, wenn $(a_k)_{k\geq k_0}$ NICHT konvergent ist.

19.9 Definition (Koordinatenfolge)

Ist $(a_k)_{k\geq k_0}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$, so ist für jedes $k \geq k_0$ $a_k = \left(a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$ mit $a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)} \in \mathbb{R}$.
Für $i = \{1, \ldots, n\}$ heißt $(a_i^{(k)})_{k\geq k_0}$ die i-te **Koordinatenfolge** von $(a_k)_{k\geq k_0}$.

19.10 Satz (Koordinatenfolge)

Eine Folge $(a_k)_{k\geq k_0}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \iff (a_i^{(k)})_{k\geq k_0}$ konvergiert gegen b_i für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$.

19.11 Beispiel (Koordinatenfolge)

$$a_k := \left(\frac{1}{k^2}\ ,\ 1 - \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2\ ,\ k \geq 1$$

Beh: $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = (0,1) \in \mathbb{R}^2$

Beweis

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \\ 1 - \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 1 \end{array}\right\} a_k \xrightarrow{k\to\infty} (0,1)$$

□

19.12 Definition (offene bzw. abgeschlossene ε-Umgebung)

Für $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x - a\| < \varepsilon\right\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{U_\varepsilon}(a) := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x - y\| \leq \varepsilon\right\}$$

die **offene** bzw. **abgeschlossene ε-Umgebung** von a.

$\mathbb{R}^1$: $U_\varepsilon(a)$ ist ein Intervall.
$\mathbb{R}^2$: $U_\varepsilon(a)$ ist ein Kreis (ohne Rand) um a mit Radius ε.

$\mathbb{R}^3$: $U_\varepsilon(a)$ ist eine Kugel (ohne Sphäre) mit Mittelpunkt a und Radius ε.
$\mathbb{R}^4$: $U_\varepsilon(a)$ ist ein 4-dimensionales Gebilde.

19.13 Bemerkung (Folge)

$(a_k)_{k\geq k_0}$ sie eine Folge im $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$.
$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}\ ,\ K \geq k_0$ derart, dass $a_k \in U_\varepsilon(a)$ $\forall\ k \in \mathbb{N}\ ,\ k \geq K$.

19.14 Definition (beschränkt, Teilfolge, Cauchy-Folge)

(a) $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt** $\iff$ es existiert ein $r > 0$ mit $M \subset U_r(0)$

(b) Eine Folge $(a_k)_{k\geq k_0}$ im $\mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn die Menge $\left\{ a_k \;\middle|\; k \geq k_0 \right\}$ beschränkt ist.

(c) Eine Folge $(b_l)_{l\geq l_0}$ im $\mathbb{R}^n$ heißt **Teilfolge** der Folge $(a_k)_{k\geq k_0}$ $\iff$ Es gibt eine Foge natürlicher Zahlen $(k_l)_{l\geq l_0}$ mit $k_{l_0} < k_{l_1} < \ldots$ und $b_l = a_{k_l}$

(d) Eine Folge $(a_k)_{k\geq k_0}$ im $\mathbb{R}^n$ heißt **Cauchy-Folge** $\iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}\ ,\ K \geq k_0$ derart, dass $\|a_k - a_l\| < \varepsilon$ für alle $k, k \in \mathbb{N}$ mit $k, l \geq K$.

Aus den entsprechenden Aussagen für $n = 1$ erhält man mit Hilfe von Satz 19.10 folgende Aussagen für Folgen im $\mathbb{R}^n$:

19.15 Satz (Grenzwert, Folge, Konvergenz)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Existiert der Grenzwert einer Folge im $\mathbb{R}^n$, so ist er eindeutig bestimmt.

(b) Jede konvergente Folge im $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt.

(c) Sind (a_k) und (b_k) konvergente Folgen im $\mathbb{R}^n$ mit den Grenzwerten a und b und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
$$(a_k + b_k) \longrightarrow a + b\ ,\ (a_k - b_k) \longrightarrow a - b\ ,\ \lambda a_k \longrightarrow \lambda a$$

(d) Konvergiert eine Folge (a_k) im $\mathbb{R}^n$ gegen $a \in \mathbb{R}^n$, so konvergiert auch jede Teilfolge von (a_k) gegen a.

(e) Eine Folge (a_k) im $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn (a_k) eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung: Nur für $n = 1$ gilt: $a_k \cdot b_k \longrightarrow a \cdot b$

19.16 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

19.17 Definition (Stetigkeit einer Funktion)

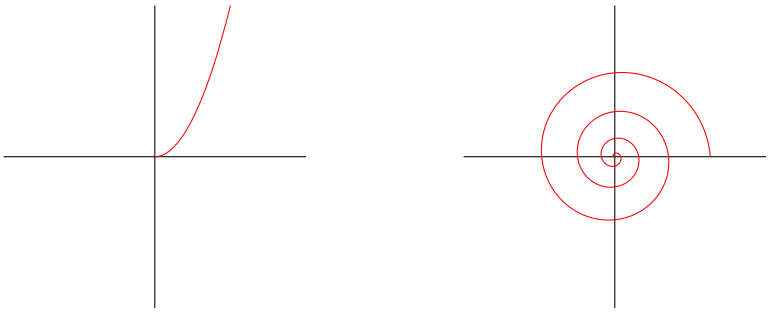
Seien $n, m \in \mathbb{N}^*$, $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

(a) f heißt **stetig** im Punkt $a \in X \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, d. h. für jede Folge $(x_k)_k$ mit $x_k \in X$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

(b) f heißt **stetig** (auf X), falls f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.

▽ Die zu beachtenden Folgen (x_k) mit $x_k \longrightarrow a$ können im $\mathbb{R}^n$ sehr vielschichtig sein.

Beispiel: $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n \longmapsto 0$



19.18 Satz (ε-δ-Kriterium)

Vor: $n, m \in \mathbb{N}^*$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Funktion und $a \in \mathbb{R}^n$

Beh: f in a stetig $\iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $\underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\text{Norm im } \mathbb{R}^m} < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $\underbrace{\|x - a\|}_{\text{Norm im } \mathbb{R}^n} < \delta$

19.19 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Gegeben sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beh: f ist stetig im Punkt $(0,0)$

Beweis

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$\|f(x,y) - f(0,0)\| = \left|\frac{\sin(x^3)}{x^2+y^2}\right| \begin{cases} = 0 & \text{für } x = 0\ ,\ y \neq 0 \\ \leq \left|\frac{x^3}{x}\right| = |x| & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \leq |x|$$

Bemerkung: Feine Abschätzung: $\sin(x) \leq x$ in der Umgebung von $0 \implies \sin(x^3) \leq x^3$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest vorgegeben. Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$:

$$\|f(x,y) - f(0,0)\| = \|f(x,y)\| \begin{cases} = 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \leq |x| & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \leq |x| \leq \|(x,y)\| < \delta < \varepsilon$$

□

19.20 Satz (Stetigkeit)

Vor: $n, m \in \mathbb{N}^*$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$, $f = (f_1, \ldots, f_m) \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ eine Funktion

Beh: f stetig in $a \iff f_\mu \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f_\mu(x)$ stetig in $a \quad \forall\, \mu = 1, \ldots, m$

19.21 Satz (Stetigkeit)

Vor: $l, n, m \in \mathbb{N}^*$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ und $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Funktionen

Beh: f stetig in $a \in X$ und g stetig in $b = f(a) \in Y \implies g \circ f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \longmapsto g(f(x))$ ist stetig in a

19.22 Bemerkung (stetige Funktionen)

Folgende Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig:

(a) add: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x + y$

(b) mult: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x \cdot y$

(c) quot: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x \cdot y^{-1}$

19.23 Satz (stetige Funktionen)

Vor: $n \in \mathbb{N}^*$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $f, g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf X

Beh:

(a) $f + g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f \cdot g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig auf X

(b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist $\frac{f}{g} \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf X

19.24 Definition (Polynom)

Ein **Polynom** auf $\mathbb{R}^n$ vom Grad r ist eine Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 + \ldots + k_n \leq r} c_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$$

wobei $c_{k_1}, \ldots, c_{k_n} \in \mathbb{R}$ und mindestens ein $c_{k_1 \ldots k_n}$ mit $k_1 + \ldots + k_n = r$ ungleich 0 ist.

19.25 Beispiel (Polynom)

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2$, ist ein Polynom vom Grad 3.

(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x_1, x_2, x_3) = 3 + 4x_3 + x_1^2 + x_1 x_2 x_3 + 2x_2^2 x_3^3$, ist ein Polynom vom Grad 5.

19.26 Beispiel (einfache stetige Funktionen)

(a) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Koordinatenfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i$ stetig.

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto c$ stetig (konstante Funktion).

(c) Polynome auf $\mathbb{R}^n$ sind stetige Funktionen (folgt aus (a) und (b) mit 19.23).

(d) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ ist stetig (f ist eine Polynomfunktion).

(e) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|$ ist stetig (folgt aus (d) und der Stetigkeit der Wurzelfunktion $\mathbb{R}^n \xrightarrow{x \to \|x\|^2} \mathbb{R} \xrightarrow{y \to \sqrt{y}} \mathbb{R}$).

19.27 Beispiel (vergleiche 19.19)

Beh: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(x^3)}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis

(i)

Durch $(x,y) \longmapsto x$ und $(x,y) \longmapsto y$ werden stetige Funktionen definiert (19.26). Also sind auch folgende Funktionen stetig:

$$\ldots : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \longmapsto \sin(x^3) \qquad [\mathbb{R}^2 \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{x^3} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin(x^3)} \mathbb{R}]$$

$$\ldots : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \longmapsto x^2 \qquad [\mathbb{R}^2 \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{x^2} \mathbb{R}]$$

$$\ldots : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \longmapsto y^2 \qquad [\mathbb{R}^2 \xrightarrow{y} \mathbb{R} \xrightarrow{y^2} \mathbb{R}]$$

Somit ist auch f stetig für $(x,y) \neq (0,0)$ (f setzt sich für $(x,y) \neq (0,0)$ aus stetigen Funktionen zusammen und ist deshalb selbst stetig).

(ii)

f stetig in $(0,0)$.

□

19.28 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beh:

(i) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig.

(ii) Für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$ ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(ta,tb)$ differenzierbar an der Stelle $t = 0$ (insbesondere ist g auch stetig bei $t = 0$).

(iii) f ist im Punkt $(0,0)$ NICHT stetig.

Beweis

Zentralübung.

□

§ 20 Elementare Topologie auf $\mathbb{R}^n$

20.1 Definition (Umgebung, offen, abgeschlossen)

(a) $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Umgebung** von $a \in \mathbb{R}^n$ $:\Longleftrightarrow$ es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(a) \subset U$.

(b) $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen** $:\Longleftrightarrow$ zu jedem $a \in U$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(a) \subset U$.

(c) $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen** $:\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen. $\left(\mathbb{R}^n \setminus A := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \notin A \right\}\right)$

20.2 Bemerkung (offen, abgeschlossen)

(a) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen.

(b) $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offen $\Longrightarrow$ $A \cap B$ offen.

(c) $A_i \subset \mathbb{R}^n$ mit $i \in I$ Familie offener Mengen $\Longrightarrow$ $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ offen.

(d) $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Longrightarrow$ $A \cup B$ abgeschlossen.

20.3 Notiz

(a) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.

(b) A offen $\Longrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ abgeschlossen.

(c) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$.

20.4 Definition (Randpunkt, Rand)

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. $x \in A$ heißt **Randpunkt** von A $:\Longleftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.

(b) $\mathrm{Rd}(A) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x \text{ Randpunkt von } A \right\}$ heißt **Rand** von A. (andere Bezeichung: ∂A)

20.5 Bemerkung (offen, abgeschlossen)

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) $\mathring{A} := A \setminus \mathrm{Rd}(A)$ ist offen (offener Kern von A).

(b) $\overline{A} := A \cup \mathrm{Rd}(A)$ ist abgeschlossen (abgeschlossene Hülle von A).

(c) $\mathrm{Rd}(A)$ ist abgeschlossen.

20.6 Definition (kompakt)

$A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt** $:\Longleftrightarrow$ A ist abgeschlossen und beschränkt.

20.7 Satz (kompakt)

Vor: $A \subset \mathbb{R}^n$.

Beh:

(a) A kompakt $\iff$ Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in A$ besitzt eine Teilfolge, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert.

(b) A abgeschlossen $\iff \Big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit$x_k \in A$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \implies a \in A\Big)$.

(c) A kompakt und $B \subset A$ abgeschlossen $\implies$ B kompakt.

20.8 Satz (kompakt)

Vor: $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion.

Beh:

(a) f ist beschränkt (d. h. $f(K) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt) und nimmt ihr Maximum und Minimum auf K an.

(b) f ist gleichmäßig stetig (d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall\, x, x' \in K$ mit $\|x - x'\| < \delta$).
(Vergleiche Analysis I, 8.11 für $n = 1$.)

20.9 Notiz

A_i mit $i \in I$ sei eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \implies \bigcap\limits_{i\in I} A_i & \text{ist abgeschlossen,} \\ \overset{\text{i. A.}}{\not\implies} \bigcup\limits_{i\in I} A_i & \text{ist abgeschlossen } (*) \end{cases}$$

Zu $(*)$: Sei $A_i = \left[\frac{1}{i}, 1\right]$ für $i \in \mathbb{N}^*$. A_i ist abgeschlossen für jedes $i \in \mathbb{N}^*$. Aber $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} = (0, 1]$ ist NICHT abgeschlossen.

§ 21 Kurven im $\mathbb{R}^m$

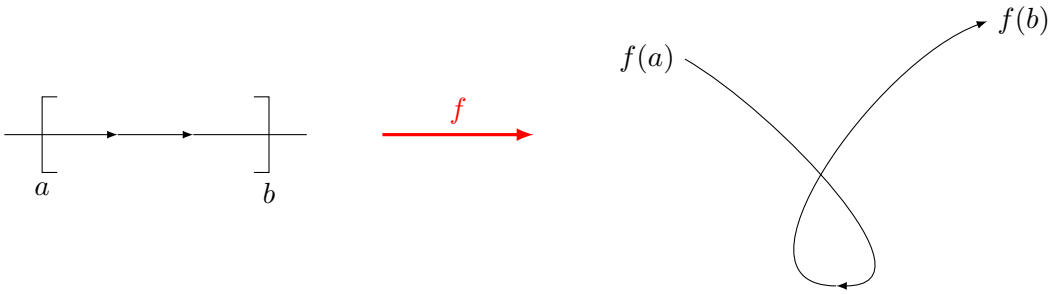
$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
Kurven: $n = 1\ ,\ m \geq 2$
Später: $n \geq 2\ ,\ m = 1$

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall.
Wir betrachten in diesem Paragraphen Funktionen (i. d. R. $m \in \mathbb{N}\ ,\ m \geq 2$)

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : \ I \longrightarrow \mathbb{R}^m\ ,\ t \longmapsto (f_1(t), \ldots, f_m(t))$$

21.1 Skizze für $m = 2$

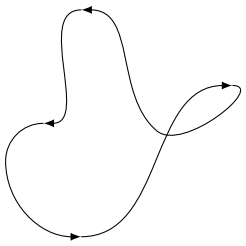
$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$



21.2 Definition (Kurve, Spur, geschlossen)

(a) Eine stetige Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (parametrisierte) **Kurve** im $\mathbb{R}^m$.
Die Bildmenge $f(I) = \left\{ (f_1(t), \ldots, f_m(t)) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; t \in I \right\}$ heißt **Spur** von f.

(b) Eine Kurve $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **geschlossen**, wenn $f(a) = f(b)$.



21.3 Bemerkung (Kurve)

Nach Satz 19.20 ist $f = (f_1, \ldots, f_m) : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann eine Kurve (d. h. f ist stetig), wenn die Funktionen $f_k\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind $\forall\ k = 1, \ldots, m$.

21.4 Definition (differenzierbar, stetig differenzierbar)

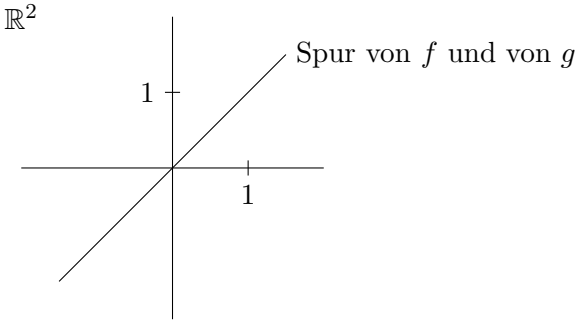
Eine Kurve $f = (f_1, \ldots, f_m)$ heißt **differenzierbar** bzw. **stetig differenzierbar**, wenn alle Funktionen f_k mit $k = 1, \ldots, m$ differenzierbar bzw. stetig differenzierbar sind.

21.5 Notiz

Eine Kurve wird durch ihre Spur noch NICHT vollständig charakterisiert. Verschiedene Kurven können die gleiche Spur haben.

21.6 Beispiel (Spur)

Es seien $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ t \longmapsto (t^3, t^2)$ und $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ t \longmapsto (t, t)$.
Dann ist $f(\mathbb{R}) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x\right\} = g(\mathbb{R})$.



21.7 Bemerkung (Kurve, Spur)

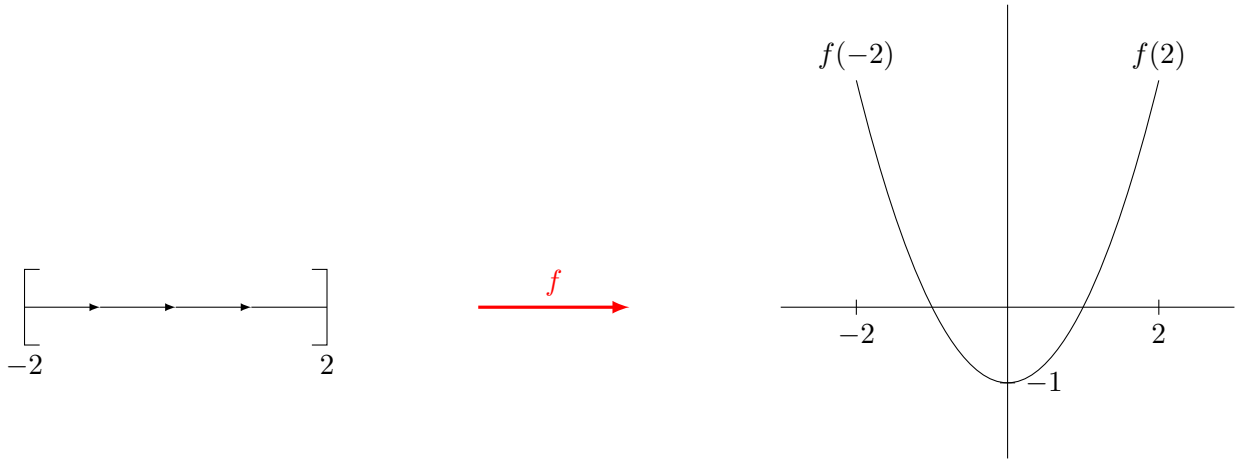
Eine stetige Funktion $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ beschreibt stets auch eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ und zwar die Kurve

$$f = (\mathrm{id}_I, g)\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ t \longmapsto (t, g(t))$$

Die Spur von f ist in diesem Fall der Graph von g.
$y = g(x)$ ist die Spurgleichung.

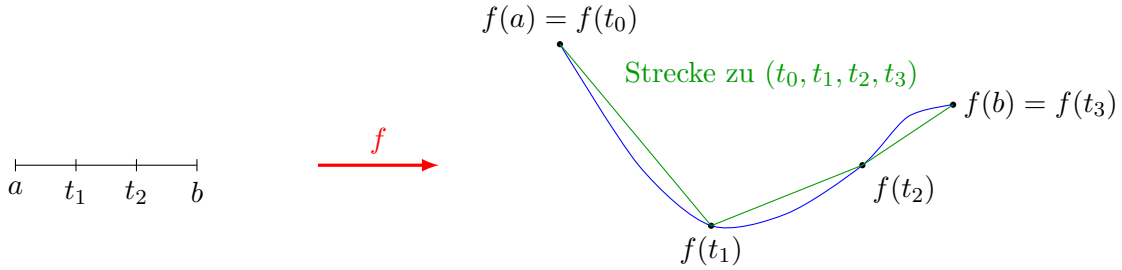
21.8 Beispiel (Kurve)

$g\colon [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 - 1$.
Zur Funktion g gehört die Kurve $f = (\mathrm{id}_{[-2,2]}, g)\colon [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, t^2 - 1)$



21.9 Approximation der Kurve durch Strecken

Es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve.
Durch eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ von $[a, b]$ erhält man eine Strecke als Approximation der Kurve.
Skizze im $\mathbb{R}^2$



21.10 Definition (Polygonzug)

Die Kurve (Strecke), die durch die Verbindungsgeraden zwischen $f(t_{i-1})$ und $f(t_i)$ gebildet wird, heißt **Polygonzug**.
Für die Länge des Polygonzuges setzt man

$$L_{P_f}(t_0, \ldots, t_k) := \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

21.11 Definition (rektifizierbare Kurve)

Eine Kurve $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **rektifizierbar** mit der Länge L $:\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ der Feinheit $\leq \delta$ gilt:

$$|L_{P_f}(t_0, \ldots, t_k) - L| \leq \varepsilon$$

Die Feinheit der Unterteilung $t_0 < t_1 < \ldots < t_k$ ist dabei

$$\max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \ldots, t_k - t_{k-1}\}$$

21.12 Satz (stetig differenzierbar – rektifizierbar)

Vor: $F = (f_1, \ldots, f_m)\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine stetig differenzierbare Kurve.
Beh: f ist rektifizierbar und

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + \ldots + (f_m'(t))^2} \, \mathrm{d}t$$

Beweis

[Fo2], §4

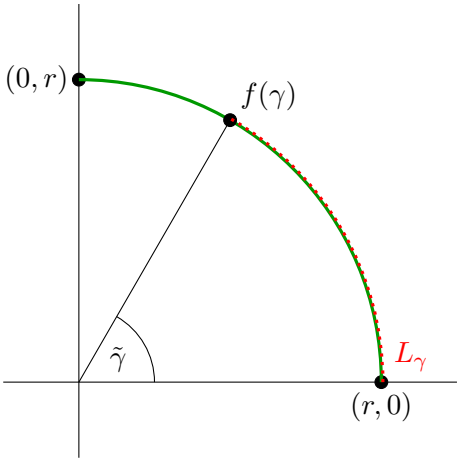
□

21.13 Beispiel (Länge einer Kurve)

Es seien $r > 0$, $\gamma \in]0, 2\pi[$ und

$$f\colon [0,\gamma] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ t \longmapsto (\underbrace{r\cos(t)}_{=f_1(t)}, \underbrace{r\sin(t)}_{=f_2(t)})$$

Skizze



$\tilde{\gamma}$ ist Winkel zu γ

f ist eine Kurve mit

$$f'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t))$$

Somit ist

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\underbrace{\big(-r\sin(t)\big)^2 + \big(r\cos(t)\big)^2}_{=r^2\left(\sin^2(t)+\cos^2(t)\right)}} = r$$

und

$$L \overset{21.12}{=} \int_0^\gamma \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^\gamma r \, \mathrm{d}t = r \cdot \gamma$$

Bemerkung: γ ist hier das Bogenmaß.

21.14 Beispiel (Länge einer Kurve)

Die Länge einer Kurve ist NICHT abhängig davon, wie die Spur der Kurve durchlaufen wird. Dazu ein Beispiel:

$g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ t \longmapsto (t,t)$
$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ t \longmapsto (t^3,t^3)$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \ , \ f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{64}, \frac{1}{64}\right)$$
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ , \ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$
$$g\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right) \ , \ f\left(\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{64}{125}, \frac{64}{125}\right)$$
$$g(1) = (1,1) \ , \ f(1) = (1,1)$$

$$g([0,1]) = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 \ \middle| \ x = y\right\} = f([0,1])$$

$$L_g = \int_0^1 \|g'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1^2 + 1^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{2}$$
$$L_f = \int_0^1 \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(3t^2)^2 + (3t^2)^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{18t^4} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 3\sqrt{2}t^2 \, \mathrm{d}t = \sqrt{2}t^3 \Big|_0^1 = \sqrt{2}$$

21.15 Satz (Länge eines Graphen)

Vor: $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion.
Beh: Der Graph von g hat die Länge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(g'(t)\right)^2} \, \mathrm{d}t$$

Beweis

Der Graph von g wird durch die Kurve $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, g(t))$ beschrieben. Wegen $f'(t) = (1, g'(t))$ folgt mit Satz 21.12

$$L = \int_a^b \|(1, g'(t))\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + \left(g'(t)\right)^2} \, \mathrm{d}t$$

□

21.16 Definition (Tangentialvektor)

(a) Es sei $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve. Ist f eine differenzierbare Kurve, so heißt

$$f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_m'(t))$$

der **Tangentialvektor** der Kurve f zum Parameterwert t.

(b) Ist f eine stetig differenzierbare Kurve und ist $f'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I$, so heißt f **reguläre** (oder nicht-singuläre) Kurve.

(c) $g\colon I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $h\colon I_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ seien reguläre Kurven und $g(t_1) = h(t_2)$ für die Parameter $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2$.
Der Schnittwinkel α zwischen den Kurven g und h im Punkt (t_1, t_2) ist definiert durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle g'(t_1), h'(t_2)\rangle}{\|g'(t_1)\| \cdot \|h'(t_2)\|} \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

Bemerkung: LAGeo: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right\rangle := x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$.

21.17 Beispiel (reguläre Kurven, Schnittwinkel)

$g\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t, t^2)$
$h\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $h(t) = (t, 1)$

Wegen

$g'(t) = (1, 2t) \neq (0,0) \quad \forall\, t \in [0,2]$
$h'(t) = (1, 0) \neq (0,0) \quad \forall\, t \in [0,2]$

sind g und h reguläre Kurven.
Weiter gilt

$$g(1) = (1,1) = h(1)$$

Für den Schnittwinkel α von g und h im Punkt $(1,1)$ gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

§ 22 Partielle Ableitungen

$f\colon \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $n \geq 1$, $m = 1$

22.1 Definition (Niveaumenge)

Es sei $U \supset \mathbb{R}^n$ und

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

sei eine Funktion.

(a) Der Graph von f ist die Menge

$$\mathrm{Gr}(f) = \Gamma_f := \left\{ (x, y) \in U \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = f(x) \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(b) Die **Niveaumenge** von f zu $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathcal{N}_f(c) := \left\{ x \in U \;\middle|\; f(x) = c \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

f ist also auf $\mathcal{N}_f(c)$ konstant mit Wert c. Für $n = 2$ nennt man die Niveaumengen auch Höhenlinien.

22.2 Definition (partiell differenzierbare Funktion, partielle Ableitung)

! $U \subset \mathbb{R}^n$ sei eine offene Menge, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor.
f heißt im Punkt $x \in U$ **partiell differenzierbar** bzgl. der i-ten Komponente, falls der Limes

$$D_i f(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ [x + he_i \in U]}} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

existiert.
$D_i f(x)$ heißt die ***i*-te partielle Ableitung von f in x**.
Weitere übliche Bezeichnungen:

$$D_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

22.3 Notiz

Die partielle Ableitung im Punkt $x \in U$ bzgl. der i-ten Komponente ist die eindimensionale Ableitung bzgl. der i-ten Variablen, wobei die $n - 1$ anderen Variablen als Konstanten interpretiert werden.

22.4 Beispiel (Sphären)

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = x + y$.
Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = x \cdot y$
Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

Man erhält zwei Funktionen

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{=D_1 f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ (x,y) \longmapsto y \quad ; \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=D_2 f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ (x,y) \longmapsto x$$

(c) $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.
Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

und man erhält n Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto 2x_i$$

(d) $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Die Niveaumengen $\mathcal{N}_f(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| = c \right\}$ heißen für $c > 0$ **Sphären** mit Radius c.
Für $n = 2$ ist $\mathcal{N}_f(c)$ ein Kreis mit Radius c; für $n = 3$ ist $\mathcal{N}_f(c)$ eine Kugel mit Radius c.
Mit der Kettenregel folgt für $x \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}$$

(e) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3)}{x^2 + y^3} & \text{, für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \overset{\text{QR}}{\underset{\text{KR}}{=}} \frac{\cos(x^3) \cdot 3x^2 \cdot (x^2+y^2) - \sin(x^3) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2 \cos(x^3)}{x^2+y^2} - \frac{2x \sin(x^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \overset{\text{QR}}{=} \frac{-\sin(x^3) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Für $(x,y) = (0,0)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\sin(h^3)}^{\to 0}}{\underbrace{h\cdot h^2}_{\to 0}}$$

$$\overset{\text{d'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h^3)\cdot 3h^2}{3h^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{(**)}{=} \lim_{h t \varnothing 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h\cdot h^2} = 0$$

mit $(*)$ $\quad (0,0)+h(1,0) = (h,0)$ und $(**)$ $\quad (0,0)+h(0,1) = (0,h)$.

22.5 Definition ((stetig) partiell differenzierbare Funktion)

$U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion.

(a) f heißt **partiell differenzierbar**
$:\Longleftrightarrow$ $D_i f(x)$ existiert für alle $x \in U$ und alle $i = 1,\dots,n$.

(b) f heißt **stetig partiell differenzierbar**
$:\Longleftrightarrow$ $D_i f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig für alle $i = 1,\dots,n$.

22.6 Notiz

f partiell differenzierbar $\overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow}$ f stetig

Beispiel

$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{\|(x,y)\|^2} & \text{, für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ist partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, aber f ist NICHT stetig im Punkt $(0,0)$.

22.7 Definition (Gradient)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei partiell differenzierbar.
Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad}(f(x)) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** f im Punkt $x \in U$.

Statt $\operatorname{grad}(f)$ schreibt man auch ∇f (Nabla f).

22.8 Beispiel (Gradient)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \|x\|$.
Dann folgt mit Beispiel 22.4,(b)

$$\operatorname{grad}(f(x)) = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x}{f(x)}$$

22.9 Bemerkung (Gradient)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ seien partiell differenzierbare Funktionen und $f \cdot g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Beh: $$\operatorname{grad}((f \cdot g)(x)) = \underbrace{g(x)}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\operatorname{grad}(f(x))}_{\in\mathbb{R}^n} + \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\operatorname{grad}(g(x))}_{\in\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n$$

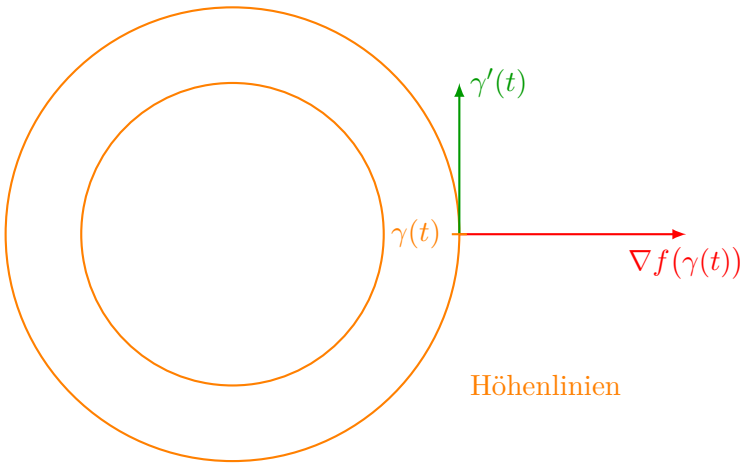
$\Big(\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g\Big)$

22.10 Anschauliche Interpretation des Gradienten

Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien, genauer:
Ist $\gamma\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, die in einer Niveaumenge der Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ verläuft, d. h. ist $\underbrace{f(\underbrace{\gamma(t)}_{\in\mathbb{R}^n})}_{\in\mathbb{R}} = c \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \in I$, dann gilt:

$$\underbrace{\operatorname{grad}\big(f(\gamma(t))\big)}_{\in\mathbb{R}^n} \perp \underbrace{\gamma'(t)}_{\in\mathbb{R}^n}$$

Skizze imn $\mathbb{R}^2$:



22.11 Definition (zweimal partiell differenzierbar)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine partiell differenzierbare Funktion heißt **zwei mal partiell differenzierbar** (bzw. **zwei mal stetig differenzierbar**), wenn alle partiellen Ableitungen $D_i f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar sind (bzw. alle Ableitungen erster und zweiter Ordnung existieren

und stetig sind.

Bezeichnung: $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f$ oder $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}$ für $i,j = 1,\ldots,n$

Für $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_i f$ schreibt man auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\ ,\ i = 1,\ldots,n$$

22.12 Beispiel (partiell differenzierbar)

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = x^2y^3 + xy^2$$

Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + y^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = 6xy^2 + 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2y + 2x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 6xy^2 + 2y$$

22.13 Satz (Satz von Schwarz)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion

Beh: Für alle $x \in U$ und alle $i,j = 1,\ldots,n$ gilt:

$$\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(x) = \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x)$$

Beweis

[Fo2], §5

□

§ 23 Totale Differenzierbarkeit

23.1 Definition ((total) differenzierbar)

$U \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine Funktion. f heißt im Punkt $x \in U$ **differenzierbar** (oder **total differenzierbar**)
$:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (gegeben durch eine $m \times n$-Matrix) derart, dass in einer Umgebung von x gilt

$$f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi)$$

wobei $\varphi\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von 0 definiert ist und die Eigenschaft

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$$

erfüllt.

23.2 Notiz

Für eine differenzierbare Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ist die Ableitung $f'(x_0) := A$ im Punkt $x_0 \in U$ eine $m \times n$-Matrix.

23.3 Satz (stetig, partiell differenzierbar)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Funktion, f im Punkt $x \in U$ differenzierbar und $f(x+\xi) = f(x) + A\xi + \varphi(\xi)$ mit $A = (a_{ij})_{i,j}$ $m \times n$-Matrix und $\lim\limits_{\xi \to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = 0$

Beh:

(a) f ist im Punkt x stetig.

(b) Alle Komponenten $f_i\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ von f, $i = 1, \ldots, m$, sind in x partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = a_{ij} \quad \text{für } i = 1, \ldots, m \ , \ j = 1, \ldots, n$$

23.4 Definition (Differential, Jacobi-Matrix, Funktional-Matrix)

Die Matrix A aus Definition 23.1 ist eindeutig bestimmt (durch die partiellen Ableitungen im Punkt x). A ist abhängig von x. A heißt **Differential** (oder **Jacobi-Matrix** oder **Funktional-Matrix**) von f im Punkt x.
Schreibweisen: $\mathrm{D}\, f(x) = \mathrm{D}_f(x) = J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,m}}$

23.5 Zusammenfassung

Für eine Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, gilt:

$$\begin{array}{ccc} f \text{ stetig partiell differenzierbar} & & \\ \Big\Downarrow {\scriptstyle [Fo2],\S 6} & & \\ f \text{ (total) differenzierbar} & \xRightarrow{23.3} & f \text{ stetig} \\ \Big\Downarrow {\scriptstyle 23.3} & & \\ f \text{ partiell differenzierbar} & & \end{array}$$

Die Umkehrungen gelten i. A. NICHT.

23.6 Definition (stetig (partiell) differenzierbare Funktion)

Eine stetig partiell differenzierbare Funktion

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \ U \subset \mathbb{R}^n$$

nennt man Kurz stetig differenzierbar.

23.7 Beispiel (partielle Ableitung, Jacobi-Matrix)

Es sei $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + e^{x_3} \\ x_1^2 \cdot \sin(x_2) + x_3 \end{pmatrix}$$

Für die partiellen Ableitungen gilt $(x = (x_1, x_2, x_3))$:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) = 1 \quad , & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) = 1 \quad , & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) = e^{x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = 2x_1 \cdot \sin(x_2) \quad , & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) = x_2^2 \cdot \cos(x_2) \quad , & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x) = 1 \end{array}$$

Für die Jacobi-Matrix gilt:

$$\mathrm{D}\, f(x) = J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{x_3} \\ 2x_1 \sin(x_2) & x_1^2 \cos(x_2) & 1 \end{pmatrix}$$

23.8 Satz (Kettenregel)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ Funktionen, $g(U) \subset V$, g im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar, f im Punkt $y_0 = g(x_0) \in V$ differenzierbar

Beh: $f \circ G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $x \longmapsto (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, ist im Punkt x_0 differenzierbar und

$$\underbrace{\mathrm{D}(f \circ g)(x)}_{k\times n\text{-Matrix}} = \underbrace{\mathrm{D}\, f\big(g(x)\big)}_{k\times m\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\mathrm{D}\, g(x)}_{m\times n\text{-Matrix}}$$

In Worten: (Differential von $f \circ g$ im Punkt x) = (Differential von f im Punkt $g(x)$) $\cdot$ (Differential von g im Punkt x)

Beweis

[Fo2], §6

□

Eine Folgerung aus 23.8 ist in folgendem Satz formuliert:

23.9 Satz (Folgerung aus 23.8)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $g = (g_1, \ldots, g_m) \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, $g(U) \subset V$

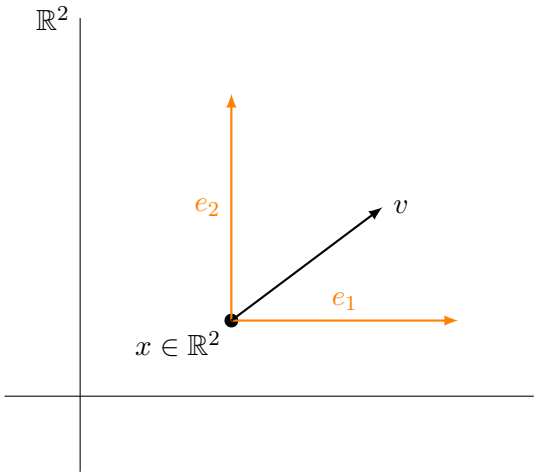
Beh: $h = (f \circ g) \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f\big(g_1(x), \ldots, g_m(x)\big)$, ist partiell differenzierbar und für $j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1, \ldots, y_m)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)}_{\in \mathbb{R}} \right) \in \mathbb{R}$$

wobei $y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$ für $i = 1, \ldots, m$

$$\underbrace{\mathrm{D}\, h(x)}_{1\times n\text{-Matrix}} = \mathrm{D}\,(f \circ g)(x) \overset{23.8}{=} \underbrace{\mathrm{D}\, f(g(x))}_{1\times m\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\, g(x)}_{m\times n\text{-Matrix}}$$

23.10 Richtungsableitung, Skizze im $\mathbb{R}^2$



Richtung $v = e_1 \;\rightsquigarrow\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$

Richtung $v = e_2 \;\rightsquigarrow\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$

Analog zu den partiellen Ableitungen definiert man eine Ableitung in Richtung eines Vektors v.

23.11 Definition (Ableitung einer Funktion in eine Richtung)

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Existiert

$$\mathrm{D}_v f(x) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ [x_0 + hv \in U]}} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

so heißt $\mathrm{D}_v f(x_0)$ die **Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung von v**. (Für $v = e_i$ ist $\mathrm{D}_v f = \mathrm{D}_i f$)

23.12 Satz (Richtungsableitung)

Modulprüfung! (Lückentext)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$

Beh: $\mathrm{D}_v f(x)$ existiert für alle $x \in U$ und es gilt

$$\mathrm{D}_v f(x) = \langle v, \operatorname{grad}(f(x)) \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

23.13 Bemerkung (Richtungsableitung)

Modulprüfung! (Lückentext)

Für $\operatorname{grad}(f(x)) \neq 0$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_v f(x) &= \langle v, \operatorname{grad}(f(x)) \rangle \\ &\overset{\text{LAGeo}}{=} \|v\| \cdot \|\operatorname{grad}(f(x))\| \cdot \cos\left(\angle\left(v, \operatorname{grad}(f(x))\right)\right) \\ &\overset{\|v\|=1}{=} \|\operatorname{grad}(f(x))\| \cdot \cos\left(\angle\left(v, \operatorname{grad}(f(x))\right)\right) \end{aligned}$$

Die Richtungsbaleitung ist also maximal, wenn v und $\operatorname{grad}(f(x))$ die gleiche Richtung haben. Der Vektor $\operatorname{grad}(f(x))$ zeigt also die RIchtung des stärksten Anstiegs an $\Big($falls $\operatorname{grad}(f(x)) \neq 0$!$\Big)$.

§ 24 Lokale Extrema

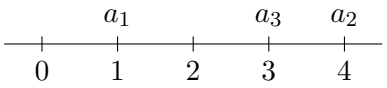
24.1 Aufgabe

Gegeben seien die Punkte $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, $s \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{s} \|x - a_k\|^2$$

Für welches $x \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x)$ maximal?

Zahlenbeispiel für $n = 1$, $s = 3$:



24.2 Aufgaben aus dem Staatsexamen

(a) Für $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ bestimme man die relativen ($\hat{=}$ lokalen) Extrema.

(b) In Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ bestimme man die kritischen Punkte von $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - 3axy + y^3$, und klassifiziere diese (lokale Maxima bzw. Minima, Sattelpunkte).

24.3 Definition (lokales Maxiumum/Minimum)

$U \subset \mathbb{R}^n$ sei eine offene Menge und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f hat in $x_0 \in U$ ein **lokales Maximum** (bzw. ein **lokales Minimum**)
$:\Longleftrightarrow$ Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von x derart, dass

$$f(x_0) \geq f(y) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(y)) \quad \forall\, y \in V \tag{F 24.1}$$

(b) Falls in F 24.1 $f(x_0) = f(y)$ nur für $y = x_0$ gilt, so hat f in x_0 ein **isoliertes lokales Maximum** (bzw. **Minimum**).

(c) Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder lokales Minimum.

24.4 Satz (Notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbare Funktion
Beh: Liegt in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum von f, so ist $\operatorname{grad}\big(f(x_0)\big) = 0$.

24.5 Definition (kritischer Punkt)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Ein $x_0 \in U$ mit $\operatorname{grad}\big(f(x_0)\big) = 0$ heißt **kritischer Punkt** von f.

24.6 Beispiel (Beispiel zu 24.1)

$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sum_{k=1}^{s} \|x - a_k\|^2\ ,\ a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n.$
f ist partiell differenzierbar, da es sich aus partiell differenzierbaren Funktionen zusammensetzt.
Bestimmung von $\operatorname{grad}(f(x))$. Sei $a_k = (a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$ für $k = 1, \ldots, s$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{s} 2\,\|x - a_k\| \cdot \frac{x_i - a_{k_i}}{\|x - a_k\|} = \sum_{k=1}^{s} 2(x - a_{k_i})$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f(x)) = 0 &\iff \sum_{k=1}^{s} 2(x_i - a_{k_i}) = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \\
&\iff s x_i = \sum_{k=1}^{s} a_{k_i} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \\
&\iff x_i = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} a_{k_i} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \iff \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} a_k
\end{aligned}$$

Der Punkt $\frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} a_k \in \mathbb{R}^n$ (Schwerpuntk von $a_1, \ldots, a_s$) ist kritischer Punkt von f.
Analog zum eindimensionalen Fall brauchen wir noch eine „Ableitung 2. Ordnung“ um Aussagen über das Vorliegen von Extrema machen zu können.

24.7 Definition (Hesse-Matrix)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.
Die $n \times n$-Matrix

$$\mathcal{H}f(x) := \left(\mathrm{D}_i\, \mathrm{D}_i\, f(x)\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_i}(x)\right)_{i=1,\ldots,n}$$

heißt **Hesse-Matrix** (oder Hessesche Matrix) von f im Punkt $x \in U$.

▽ $\mathcal{H}f(x)$ ist eitwas anderes als die Funktional-Matrix $\mathrm{D}\, f(x)$.

24.8 Notiz

(a) $\mathcal{H}f(x)$ ist symmetrisch (folgt aus dem Satz von Schwarz).

(b) In manchen Büchern wird $\mathcal{H}f(x)$ mit $f''(x)$ bezeichnet.

24.9 Satz (lineare Approximation 2. Ordnung von f mit Hilfe von Gradient und Hesse-Matrix)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion, $x \in U$, $a := \operatorname{grad}(f(x))$, $A := \mathcal{H}f(x)$

Beh:

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle a, \xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, A\xi\rangle + \varphi(\xi)$$

wobei $\lim\limits_{\xi\to 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|^2} = 0$

24.10 Bezeichnungen

Zu den im Folgenden verwendeten Begriffen „positiv definit“, „negativ definit“ und „indefinit“ für eine reellwertige $n \times n$-Matrix siehe LAGeo-Vorlesung bzw. Anhang A24.1.

Für eine reellwertige, symmetrische 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

(i) A positiv (bzw. negativ) definit $\iff$ $\det(A) > 0$ und $a > 0$ (bzw. $a < 0$)

(ii) A indefinit $\iff$ $\det(A) < 0$

24.11 Satz (Hesse-Matrix)

Vor: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion (d. h. f zweimal partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen 2. Ordnung sind stetig), $x_0 \in U$, $\operatorname{grad}\big(f(x_0)\big) = 0$

Beh:

(a) Ist $\mathcal{H}f(x)$ postitiv definit (bzw. negativ definit), dann besitzt f in x_0 ein lokales isoliertes Minimum (bzw. Maximum).

(b) Ist $\mathcal{H}f(x)$ indefinit, dann hat f in x_0 KEIN lokales Extremum.

24.12 Bezeichnung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in U$. Gibt es in jeder Umgebung V von x_0 ein $x_1 \in U$ und ein x_2 in U derart, dass $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$, soheißt x_0 **Sattelpunkt** von f.

24.13 Notiz

Ist $\operatorname{grad}\big(f(x_0)\big) = 0$ und $\mathcal{H}f(x_0)$ indefinit, so ist x_0 ein Sattelpunkt von f.

24.14 Fortsetzung von 24.1

$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{s} \|x - a_k\|^2\ \ldots$

Nach 24.6 ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{s} 2(x_i - a_{k_i})$$

und $x_0 = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} a_k$ ein kritischer Punkt von f.
Hesse-Matrix von f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x) \right)(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 2s & \text{für } i = j \end{cases}$$

das heißt

$$\mathcal{H}f(x) = \begin{pmatrix} 2s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2s \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}f(x)$ hat den n-fachen Eigenwert $2s$.
Da $2s > 0$ ist, ist $\mathcal{H}f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ positive definit, d. h. f hat nach Satz 24.11 im Punkt $x = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} a_k$ ein lokales isoliertes Minimum.

Verhalten von f für $\|x\| \longrightarrow \infty$:
Wegen $\|x - a_k\| \overset{19.3}{\geq} \big|\, \|x\| - \|a_k\| \,\big| \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \infty$ folgt $f(x) \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \infty$.
Da f nur im Punkt $x = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} a_k$ ein lokales Extremum hat, liegt in diesem Punkt ein globales Minimum.

24.15 Beispiel (Gradient)

$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = x^2 - y^2$. Es gilt:

$$\operatorname{grad}\big(f(x,y)\big) = 0 \iff (2x, -2y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$$

Weiter gilt:

$$\mathcal{H}f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2$$

Wegen $\det\big(\mathcal{H}f(0)\big) = -4 < 0$ ist $\mathcal{H}f(x)$ indefinit.
f besitzt im Punkt $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

24.16 Notiz

Ist die Hesse-Matrix in einem kritischen Punkt x_0 weder positiv definit, noch negativ definit, noch indefinit, so lassen sich KEINE allgemeinen Aussagen über lokale Extrema machen. Dazu folgende Beispiele:

24.17 Beispiel

$f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 \ , \ \operatorname{grad}\left(f_1(x,y)\right) = (2x, 4y^3)$$
$$f_2(x,y) = x^2 \ , \ \operatorname{grad}\left(f_2(x,y)\right) = (2x, 0)$$
$$f_3(x,y) = x^2 + y^3 \ , \ \operatorname{grad}\left(f_3(x,y)\right) = (2x, 3y^2)$$

Im Punkt $z = (0,0)$ ist $\operatorname{grad}\left(f_i(z)\right) = 0$, d. h. $(0,0)$ ist für f_1, f_2 und f_3 kritischer Punkt.

Es gilt:

$$\mathcal{H}f_i(z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$.
$\mathcal{H}f_i(z)$ ist weder positive definit, noch negativ definit, noch indefinit. $\mathcal{H}f_i(z)$ ist positiv semidefinit. Weiter gilt:

- f_1 hat in z ein lokales isoliertes Minimum, denn

$$f_1(0,0) = 0 \ , \ f_1(x,y) > 0 \quad \forall\ (x,y) \neq (0,0)$$

- f_2 hat in z ein lokales Minimum, das NICHT isoliert ist, denn

$$f_2(0,0) = 0 \ , \ f_2(x,y) \geq 0 \quad \forall\ (x,y) \ , \ f_2(0,y) = 0$$

- f_3 hat in z einen Sattelpunkt, denn

$$f_2(0,0) = 0 \ , \ f_3\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} > 0 \ , \ f_3\left(0, -\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3} < 0$$

24.18 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy^2$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und alle lokalen Extrema der Funktion f.

(b) Besitzt die Funktion f ein globales Maximum oder ein globales Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

(a) Aus $\operatorname{grad}\left(f(x,y)\right) = (4x - y^2, 2y - 2xy) = (0,0)$ erhält man die kritischen Stellen $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,-2)$. Die Hesse-Matrix hat die Form

$$\mathcal{H}_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -2y \\ -2y & 2 - 2x \end{pmatrix}$$

Wegen $\det\left(\mathcal{H}_f(1,-2)\right) < 0$ liegen in den Punkten $(1,2)$ und $(1,-2)$ Sattelpunkte.

(b) Wegen

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$$

besitzt f KEIN globales Maximum.
Wegen

$$\lim_{t\to\infty} f(t,t) = \lim_{t\to\infty} 2t^2 + t^2 - t^3 = -\infty$$

besitzt f KEIN globales Minimum.

Extrema und Nebenbedingungen

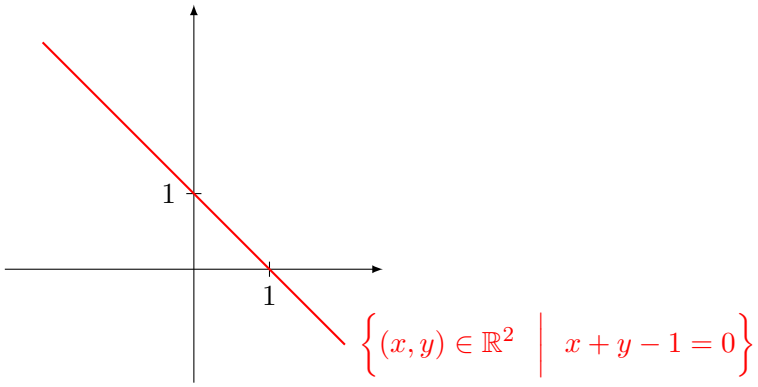
24.19 Beispiel (Maximum unter einer Nebenbedingung)

$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = x \cdot y$$

Bestimmen Sie das Maximum von f unter der Nebenbedingung

$$x + y - 1 = 0$$



Lösungsmethoden für solche Aufgaben

(I) Explizite Methode (NICHT immer anwendbar)

(i) Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen.
Durch Einsetzen entsteht ein Extremalproblem ohne Nebenbedingung.

(ii) Falls die Nebenbedinung einen Kreis definiert, führt die Transformation in Polarkoordinaten manchmal zum Ziel.

(II) Lagrangescher Multiplikator ([Fo2], §9)
$\rightsquigarrow$ Zur Zeit NICHT Pflichtstoff des Staatesexamens; auch KEIN Pflichtstoff in der Modulprüfung.

§ 25 Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen

Quelle: Burg u. a.: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band III

Differentialgleichungen sind für den Ingenieur und Naturwissenschaftler ein unentbehrliches Hilfsmittel. Zahlreiche Naturgesetze und technische Vorgänge lassen sich durch Differentialgleichungen beschreiben.

Was ist eine Differentialgleichung?

Differentialgleichungen als Modelle für technisch-physikalische Probleme

Unser Anliegen in diesem Abschnitt ist es, einfache Vorgänge aus Ingenieurwissenschaften und Physik zu mathematisieren, d. h. in die Sprache der Mathematik zu übersetzen. Die dabei gewonnenen Modelle besitzen, wie wir sehen werden, eine gemeinsame mathematische Struktur: die einer *Differentialgleichung*.

25.1 Beispiel (Der radioaktive Zerfall)

Wir wollen den zeitlichen Ablauf des Zerfalls von radioaktiven Substanzen beschreiben. Hierzu sei $m(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge eines radioaktiven Stoffes und $h > 0$ ein *kleiner* Zeitabschnitt. Die Erfahrung zeigt

$$m(t+h) - m(t) \sim m(t) \cdot h$$

also, mit dem Proportionalitätsfaktor $k > 0$,

$$m(t+h) - m(t) = -km(t) \cdot h$$

Nach Division durch h erhalten wir

$$\frac{m(t+h) - m(t)}{h} = -km(t)$$

Der Grenzübergang $h \to 0$ liefert dann

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = -km(t)$$

kurz geschrieben:

$$\boxed{m'(t) = -km(t)}$$

Diese Gleichung stellt ein mathematisches Modell für den zeitlichen Ablauf des Zerfalls eines radioaktiven Stoffes mit der Zerfallskonstanten k dar.

§ 26 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir beschränken uns auf den Fall $G \subset \mathbb{R}^2$.

26.1 Definition (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ sei eine Funktion. Dann heißt

$$y' = f(x,y) \tag{F 26.1}$$

Differentialgleichung 1. Ordnung (in expliziter Form).
Eine differenzierbare Funktion

$$\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ I \subset \mathbb{R}$$

heißt **Lösung** von (F 26.1), wenn

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \tag{F 26.2}$$

für alle $x \in I$ erfüllt ist.
(Insbesondere muss der Graph von φ in G enthalten sein.)

26.2 Notiz

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ und $F\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Dann heißt die Gleichung

$$F(x,y,y') = 0$$

Differentialgleichung 1. Ordnung (in impliziter Form).

26.3 Beispiel (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Beschreibung der Differentialgleichung

$$m'(t) = -km(t)$$

in der Form 26.1: Wähle $G = [0,\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$. $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ ist dann defiiniert durch

$$f(x,y) = -ky\ ,\ k > 0$$

Die dazugehörige Differentialgleichung lautet

$$y' = -ky\ ,\ k > 0 \tag{F 26.3}$$

Lösungsfunktion zu (F 26.3):

$$\varphi\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = c \cdot \exp(-kx)$$

Überprüfung der Lösung durch Einsetzen in (F 26.3):

$$\text{L.S.:}\ \ \varphi'(x) = c \cdot \exp(-kx) \cdot (-k)$$
$$\text{R.S.:}\ \ f(x, \varphi(x)) = -k \cdot \varphi(x) = -kc \cdot \exp(-kx)$$

$\Longrightarrow$ L.S.=R.S.

26.4 Definition (globale bzw. lokale Lipschitz-Bedingung, Lipschitz-Konstante)

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$ sei eine Funktion.

(a) f genügt in G einer **globalen Lipschitz-Bedingung** (bzgl. y) mit der **Lipschitz-Konstanten** $\mathscr{L} \in \mathbb{R}\ ,\ \mathscr{L} \geq 0$

$$:\Longleftrightarrow\ |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \mathscr{L}(y - \tilde{y})$$

für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in G$.

(b) f genügt in G **lokal** einer **Lipschitz-Bedingung** (bzgl. y) $:\Longleftrightarrow$ Zu jedem Punkt $(a, b) \in G$ existiert eine Umgebung U von (a, b) derart, dass f in $G \cap U$ einer Lipschitz-Bedingung mit (einer von U abhängigen) Konstanten $\mathscr{L} \geq 0$ genügt.

26.5 Beispiel (Lipschitz-Bedingung)

Sei $G = \mathbb{R}^2$ und sei $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = k \cdot y \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = |ky - k\tilde{y}| = \underbrace{|k|}_{=:\mathscr{L}} \cdot |y - \tilde{y}| \quad \forall\ (x, y), (x, \tilde{y}) \in G$$

Also genügt f in G einer (globalen) Lipschitz-Bedingung.

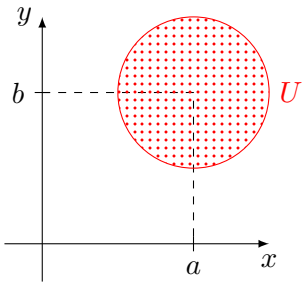
26.6 Beispiel (Lipschitz-Bedingung)

Sei $G = \mathbb{R}^2\ ,\ f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ sie definiert durch $f(x, y) = y^2$. Dann gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = |y^2 - \tilde{y}^2| = |y + \tilde{y}| \cdot |y - \tilde{y}|$$

(i) $|y+\tilde{y}|$ kann jede Schranke überschreiten, d. h. f genügt in G KEINER (globalen) Lipschitz-Bedingung.

(ii) Sei $(a, b) \in G$ und U die Kreisscheibe mit Mittelpunkt (a, b) und Radius 1. Dann gilt:



$$|y+\tilde{y}| \leq |y| + |\tilde{y}| \leq 2(|b|+1) =: \mathscr{L} < \infty$$

für alle $(x,y),(x,\tilde{y}) \in G \cap U$, d. h. f genügt in G lokal einer Lipschitz-Bedingung.

26.7 Satz (Lipschitz-Bedingung)

Vor: $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ sei eine Funktion. f sei bzgl. der Variablen y stetig partiell differenzierbar (d. h. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und ist stetig).

Beh: f genügt in G lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis

[Fo2], §12.

□

26.8 Beispiel (Lipschitz-Bedingung)

Sei $G = \mathbb{R}^2$ und $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

Dann ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)$, d. h. f ist bzgl. y stetig partiell differenzierbar. Nach 26.7 (G ist offen) genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

26.9 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Vor: $G \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, f genügt lokal einer Lipschitz-Bedingung, $\varphi, \psi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall seien zwei Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit der Eigenschaft $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in I$.

Beh: $\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall\, x \in I$

Beweis

[Fo2], §12.

□

26.10 Beispiel (Eindeutigkeit NICHT immer erfüllt)

Sei $G = \mathbb{R}^2$, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$. Die dazugehörige Differentialgleichung lautet

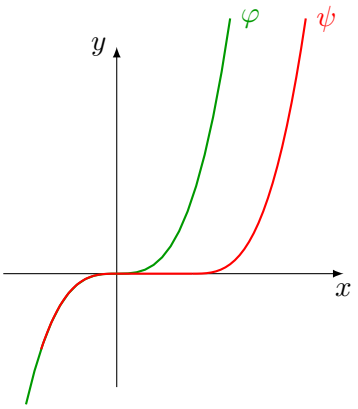
$$y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}} \tag{F 26.4}$$

Seien $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) = x^3$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x^3, & \text{für } x \leq 0 \\ 0, & \text{für } 0 < x < 1 \\ (x-1)^3, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

φ und ψ sind Lösungen von (F 26.4) mit $\varphi(0) = 0 = \psi(0)$.



26.11 Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)

Vor: $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, f genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beh: Zu jedem $(a,c) \in G$ existiert ein $\gamma > 0$ un eine Lösung

$$\varphi\colon [a-\gamma, a+\gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(a) = c$. Nach 26.9 ist φ durch die Bedingung $\varphi(a) = c$ eindeutig bestimmt.

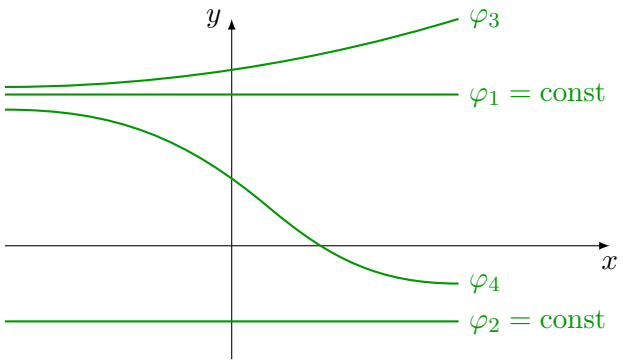
Beweis

[Fo2], §12.

□

26.12 Notiz

Sind üfr eine Differnetialgleichung 1. Ordnung die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes erfüllt, so können sich die Lösungskurven NICHT schneiden. Existieren konstante Lösungsfunktionen, so wirken diese wie horizontale Barrieren für andere Lösungskurven.



26.13 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

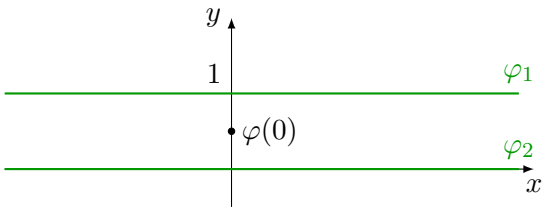
$I \subset \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \sin(\pi y^2) \tag{F 26.5}$$

mit $\varphi(0) = \frac{1}{2}$.

Beh: Es gilt $0 < \varphi(x) < 1$ für alle $x \in I$.

Idee:



(i) $f(x,y) = \sin(\pi y^2)$ ist stetig
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(\pi y^2) \cdot 2\pi y$ ist stetig
$G = I \times \mathbb{R}$ ist offen
$\Longrightarrow$ Voraussetzungen des Existenzsatzes sind erfüllt.

(ii) $\varphi_1, \varphi_2\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_1(x) = 0$ bzw. $\varphi_2(x) = 1$ sind Lösungen von (F 26.5) mit $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 1$.

(iii) Da $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ und φ als Lösung von (F 26.5) stetig ist, muss der Graph von φ zwischen den Grpahen von φ_1 und φ_2 liegen.
$\Longrightarrow \; 0 < \varphi(x) < 1 \quad \forall\, x \in I.$

§ 27 Elementare Lösungsmethoden zu Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Paragraphen sollen Lösungsmethoden zu folgenden Differentialgleichungen besprochen werden:

(1) **Differentialgleichungen mit getrennten Variablen**:

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

wobei $h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.
Beispiel: $y' = y^2 \quad (h(x) = 1\ ,\ g(y) = y^2)$

(2) **Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung**:

$$y' = a(x)y + b(x) \quad \text{(linear bzgl. } y\text{)}$$

wobei $a, b\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.
Beispiel:

$y' = ky \quad$ (linear homogen, $a(x) = k\ ,\ b(x) = 0$)
$y' = 2xy + x^3 \quad$ (linear inhomogen, $a(x) = 2x\ ,\ b(x) = x^3$)

(3) **Substitution**:
Beispiel: $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)\ ,\ h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig Funktion.
Substituation $z = \frac{y}{x}$.

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

$$(V1)\quad \begin{cases} I, J \subset \mathbb{R} \text{ offene Intervalle} \\ h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ g\colon J \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetige Funktionen} \\ \text{Differentialgleichung} \\ \qquad y' = h(x) \cdot g(x) \qquad\qquad (\text{F } 27.1) \\ \text{mit } (x, y) \in I \times J. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung (F 27.1) heißt Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

27.1 Bemerkung (eindeutig bestimmte Lösung)

Es sei $(V1)$ erfüllt.

(a) Ist $y_0 \in J$ und $g(y_0) = 0$, so ist $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) := y_0$ eine Lösung von (F 27.1).

Denn:

$$\text{L.S.:}\ \ \varphi'(x) = 0$$
$$\text{R.S.:}\ \ h(x) \cdot g(\varphi(x)) = h(x) \cdot \underbrace{g(y_0)}_{=0} = 0$$

(b) Sind die Lösungen von (F 27.1) durch Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt (z. B. wenn $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$ lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt), so teilen die Nullstellen von g den Bereich $I \times J$ in Streifen. Lösungskurven zu nicht-konstanten Lösungsfunktionen können sich dann nur innerhalb solcher Streifen bewegen.

27.2 Beispiel (vergleiche Beispiel 26.13)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \sin(\pi y^2 \tag{F 27.2}$$

(F 27.2) ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, wobei

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ h(x) = 1$$
$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ g(y) = \sin(\pi y^2)$$

gilt.
Nach Beispiel 26.13 gilt der Eindeutigkeitssatzs für (F 27.2), d. h. Lösungen von (F 27.2) sind durch eine Anfangsbedingung eindeutig bestimmt.
Wegen $h(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sind alle konstanten Lösungsfunktionen von (F 27.2) durch die Nullstellen von g bestimmt.

$$g(y) = 0 \iff \sin(\pi y^2) = 0 \overset{\pi y^2 > 0}{\iff} \pi y^2 \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots\}$$
$$\iff y^2 \in \{0, 1, 2, 3 \ldots\} \iff y \in \left\{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \ldots\right\}$$

Konstante Lösungen von (F 27.2) sind also Funktionen

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi_1(x) = 0\ ,\ \varphi_2(x) = 1\ ,\ \varphi_3(x) = -1\ ,\ \varphi_4(x) = \sqrt{2}\ \ldots$$

27.3 Vorüberlegung zur Lösung von (F 27.2)

(KEINE mathematischen Folgerungen!)

Sei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.

Schreibe $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ für y', also

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = h(x) \cdot g(y) \\
\Longrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = h(x)\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ &\underbrace{\int \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow{\text{Stammfkt.}} G(y)} = \underbrace{\int h(t)\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow{\text{Stammfkt.}} H(x)} + C \qquad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Gleichung

$$G(y) = H(x) + C$$

nach y auflösen.
Diese Überlegung wird durch folgenden Satz präzisiert.

27.4 Satz (Existez einer eindeutigen Lösung)

Vor: $(V1)$ sei erfüllt. Weiter gelte: $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$, $(x_0, y_0) \in I \times J$, $H\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $G\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

und $\tilde{I} \subset I$ sei ein Intervall mit $x_0 \in \tilde{I}$ und $H(\tilde{I}) \subset G(I)$.

Beh:

(a) Es existiert genau eine Lösung

$$\varphi\colon \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung (F 27.2) mit Anfangsbedingungen $\varphi(x_0) = y_0$.

(b) Eine Lösung φ der Differentialgleichung (F 27.2) mit $\varphi(x_0) = y_0$ erfüllt die Gleichung $G(\varphi(x)) = H(x)$ für alle $x \in \tilde{I}$.

Zusatz: Um eine explizite Lösung von (F 27.2) zu erhalten, muss die Gleichung in (b) nach $\varphi(x)$ aufgelöst werden; dies ist manchmal schwer oder sogar unmöglich.

27.5 Beispiel (Lösung einer Differentialgleichung)

Gegeben sei die Differentialgleichung in $\mathbb{R}^2$

$$y' = y^2 \tag{F 27.3}$$

Gesucht: Lösungen φ von (F 27.3) mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$.

(i) Die Differentialgleichung (F 27.3) erfüllt die Voraussetzungen des Existenz- und Erhal-

tungssatzes, d. h. die Lösungen sind durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt; es gibt also genau eine LÖsung φ von (F 27.3) mit $\varphi(0) = 1$.

(ii) (F 27.3) ist eine Differentialgleichung mit getrennten variablen.

$$g(y) = 0 \iff y = 0$$

$\rightsquigarrow$ $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x)00$ erfüllt die Anfangsbaedingung NICHT.

(iii) Wegen $\varphi(0) = 1 > 0$ können wir folgende Daten zu Satz 27.4 festlegen:

$$I = \mathbb{R}\ ,\ J =]0, \infty[\ ,\ (0,1) \in I \times J$$

Weiter gilt:

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \quad \forall\ x \in I$$

$$G(y) = \int_1^y \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^y \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{y} + 1 \quad \forall\ y \in J$$

$$G(J) = G(]0, \infty[) =]-\infty, 1[$$

$\xrightarrow{H \text{ Identität}}$ $\tilde{I} =]-\infty, 1[$ ist das maximale Intervall mit $H(\tilde{I}) \subset G(J)$ und $x_0 \in \tilde{I}$.
Jede Lösung $\varphi\colon \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ von (F 27.3) erfüllt nach 27.4 die Gleichung

$$-\frac{1}{\varphi(x)} + 1 = x \implies \varphi(x) = \frac{1}{1-x}$$

27.6 allgemeine Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Wie erhält man eine „allgemeine“ Lösung einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen, d. h. Lösungen ohne Vorgabe von Angangsbedingungen?

Lösungsmethode

(„Kochrezept“, vgl. Vorüberlegung 27.3)

Es sei

$$y' = h(x) \cdot g(y) \tag{F 27.4}$$

mit $h\colon I \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(1) Bestimme die Nullstellen von $g(y)$.
Die Nullstellen von g liefern konstante Lösungen von (F 27.4), d. h. ist $g(y_0) = 0$, so ist $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = y_0$ eine Lösung von (F 27.4).
(In den meisten Fällen erhält man damit alle konstanten Lösungen von (F 27.4))

(2) Trennung der Variablen und Integration

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int h(x)\,\mathrm{d}x + C \qquad (C \in \mathbb{R}) \tag{F 27.5}$$

(3) Durch Ausführung der Integration erhält man eine Gleichung

$$G(y) = H(x) + C \qquad (C \in R) \tag{F 27.6}$$

(4) Auflösen nach y liefert Lösungen von (F 27.4).

27.7 Beispiel (Lösung einer Differentialgleichung)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \exp(2x - y) \tag{F 27.7}$$

Lösen sie die Differentialgleichung (F 27.7) und geben Sie für jede Lösung den maximalen Definitionsbereich an.
Lösung: Übungsaufgabe.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Im folgenden seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x) \qquad (x \in I) \tag{F 27.8}$$

Bezeichnungen

Die Differentialgleichung (F 27.8) heißt lineare Differentialgleichung 1. Ordung; man nennt sie (linear) homogen, wenn $s(x) = 0$ für alle $x \in I$ und (linear) inhomogen, wenn $s(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in I$.

Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

..., d. h. $s \equiv 0$.

Gegeben sei also die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y \tag{F 27.9}$$

mit $a\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funkition.

27.8 Bemerkung (Lösung einer Differentialgleichung)

(a) $\varphi \equiv 0$ ist eine Lösung von (F 27.9).

(b) Für $\tilde{I} \subset I$ offen sind Lösungen $\varphi\colon \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ von (F 27.9) durch eine anfangsbedingung eindeutig bestimmt.

(c) Für eine Lösung $\varphi\colon \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{I} \subset I$ offen) von (F 27.9) gilt:

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_0) > 0 \text{ für mindestens ein } x_0 \in \tilde{I} \implies \varphi(x) > 0 \quad \forall\, x \in \tilde{I} \\
&\varphi(x_0) = 0 \text{ für mindestens ein } x_0 \in \tilde{I} \implies \varphi(x) = 0 \quad \forall\, x \in \tilde{I} \\
&\varphi(x_0) < 0 \text{ für mindestens ein } x_0 \in \tilde{I} \implies \varphi(x) < 0 \quad \forall\, x \in \tilde{I}
\end{aligned}$$

Ist $I = \mathbb{R}$, so kann $\tilde{I} = \mathbb{R}$ gewählt werden.

27.9 Satz (Gesamtheit der Lösungen einer Differentialgleichung)

Vor: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ und

$$y' = a(x)y \tag{F 27.10}$$

Beh:

(a) Es existiert genau eine Lösung $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ von (F 27.10) mit $\varphi(x_0) = y_0$. φ ist dabei gegeben durch

$$\varphi(x) = y_0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

(b) Sei A (beliebige) Stammfunktion von a. Die Gesamtheit aller Lösungen von (F 27.10) ist gegeben durch die Funktionen $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = C \cdot \exp\left(A(x)\right) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

27.10 Beispiel (Lösung einer Differentialgleichung)

Es sei $I = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = ky \quad , \text{ d. h } a(x) = k \quad \forall x \in I \tag{F 27.11}$$

Nach 27.9,(b) haben die Lösungen von (F 27.11) die Form

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\varphi(x) = C \cdot \exp(kx) \qquad (C \in \mathbb{R}) \tag{F 27.12}$$

Gesucht sei eine Lösung von (F 27.11) mit der Anfangsbedingung $\varphi(2) = 3$.

1. Variante

$$\varphi(x) = 3 \cdot \exp\left(\int_2^x k \, \mathrm{d}t \right) = 3 \cdot \exp(kx - 2k) = \frac{3 \cdot \exp(kx)}{\exp(2k)}$$

2. Variante

$$\begin{aligned} 3 = \varphi(2) &\overset{\text{(F 27.12)}}{=} C \cdot \exp(k \cdot 2) \\ \Longrightarrow\ C &= \frac{3}{\exp(k \cdot 2)} \\ \overset{(F\,27.12)}{\Longrightarrow}\ \varphi(x) &= \frac{3 \cdot \exp(kx)}{\exp(2k)} \end{aligned}$$

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{F 27.13}$$

$a, s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $s(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in I$.

27.11 Variation der Konstanten

(Die Methode der Variation der Konstanten stellt eine Möglichkeit zur Lösung von (F 27.13) dar. Einen weiteren Lösungsweg werden wir im Anschluss kennen lernen.)

(i) Sei φ Lösung von (F 27.10), d. h. von $y' = a(x)y$.
$\Longrightarrow$ $C \cdot \varphi$ ist Lösung von (F 27.10) für alle $C \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $\varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ Lösung von (F 27.10) und $\varphi(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in I$.
$\overset{27.8}{\Longrightarrow}$ $\varphi(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$.

Ansatz: $\psi(x) = u(x) \cdot \varphi(x)$, mit $u \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion.

Wie muss $u(x)$ aussehen, damit $\psi(x)$ eine Lösung von (F 27.13) ist?

Einsetzen von $\psi(x)$ in (F 27.13):

$$\begin{aligned}
&\psi'(x) = a(x)\psi(x) + s(x) \quad \forall\, x \in I \\
&\iff u'(x)\cdot\varphi(x) + u(x)\cdot\varphi'(x) = a(x)\cdot u(x)\cdot\varphi(x) + s(x) \quad \forall\, x \in I \\
&\overset{(*)}{\iff} u'(x)\cdot\varphi(x) + u(x)\cdot a(x)\cdot\varphi(x) = a(x)\cdot u(x)\cdot\varphi(x) + s(x) \quad \forall\, x \in I \\
&\overset{\varphi(x)\neq 0}{\iff} u'(x) = s(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)} \quad \forall\, x \in I \\
&\iff u(x) = \int s(t)\cdot\frac{1}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t + C \qquad (C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$(*)$ φ Lösung von (F 27.10)

Die Überlegungen von 27.11 werden jetzt in einem Satz eingebettet. Statt dem Vorgehen von 27.11 kann man direkt diesen Satz verwenden.

27.12 Satz (Existenz einer eindeutigen Lösung)

Vor: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $a, s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, $A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$ und

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{F 27.14}$$

Beh: Es existiert genau eine Lösung $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (F 27.14) mit $\psi(x_0) = y_0$. ψ ist dabei gegeben durch

$$\psi(x) = \exp\big(A(x)\big)\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} s(t)\cdot\exp\big(-A(t)\big)\,\mathrm{d}t\right]$$

27.13 Beispiel (Lösung einer Differentialgleichung)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2y}{x} + 2x \tag{F 27.15}$$

Weiter sei $I =]-\infty, 0[$ (analog für $I =]0, \infty[$).
Gesucht: Lösung ψ von (F 27.15) mit $\psi(-2) = 3$.
Da $a(x) = -\frac{2}{x}$ und $s(x) = 2x$ zwei stetige Funktionen auf I definieren, kann Satz 27.12 ange-

wandt werden.

$$A(x) = \int_{-2}^{x} -\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = -2\ln(|x|) + 2\ln(|-2|) = -2\ln(-x) + 2\ln(2)$$

$$\overset{27.12}{\Longrightarrow}\ \psi(x) = \underbrace{\exp\big(-2\ln(-x) + 2\ln(2)\big)}_{=\frac{1}{x^2}\cdot 4} \cdot \left[3 + \int_{-2}^{x} 2t \cdot \underbrace{\exp\big(2ln(-t) - 2\ln(2)\big)}_{=\frac{t^2}{4}}\right]$$

$$= \ldots = \frac{4}{x^2}cdot\left[3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^4 - 8\right)\right] = \ldots = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}x^2$$

Probe:

$$\text{L.S.:}\ \ \psi'(x) = \left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)' = -\frac{8}{x^3} + x$$

$$\text{R.S.:}\ \ -\frac{2\psi(x)}{x} + 2x = \frac{-2\left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)}{x} + 2x = -\frac{8}{x^3} - x + 2x = -\frac{8}{x^3} + x$$

27.14 Satz (Struktur der Lösungsmenge einer Differentialgleichung 1. Ordnung)

Vor: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + s(x) \tag{F 27.16}$$

mit $a, s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Die zu (F 27.16) gehörige homogene Differentialgleichung hat die Form

$$y' = a(x)y \tag{F 27.17}$$

Sei $V := \left\{g\colon I \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; g \text{ ist differenzierbar}\right\}$, ($V$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum) und $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ sei die Menge der Lösungen von (F 27.16) bzw. (F 27.17).

Beh:

(a) $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ ist ein eindimensionaler Untervektorraum von V; insebsondere gilt also:

$$\tilde{\varphi} \neq 0 \implies \mathcal{L}_{\text{hom}} = \left\{C \cdot \tilde{\varphi} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$$

(b) $\mathcal{L}$ ist ein eindimensionaler affiner Unterraum von V wobei

$$\mathcal{L} = \psi_p + \mathcal{L}_{\text{hom}}$$

mit $\psi_p \in \mathcal{L}$.

(c) $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L} \implies \psi_2 - \psi_1 \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$

27.15 Beispiel (Staatesexamensaufgabe)

Gegeben seien zwei Lösungen $\psi_1, \psi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi_1 \neq \psi_2$ der Differentialgleichung

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{F 27.18}$$

wobei $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen seien.
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (F 27.18).

Idee: (F 27.18) ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung. Nach 27.14 ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von (F 27.18) gegeben durch

$$\mathcal{L} = \psi_p + \mathcal{L}_{\text{hom}}$$

mit $\psi_p \in \mathcal{L}$.
Wähle $\psi_p = \psi_1$ und $\tilde{\varphi} = \psi_2 - \psi_1 \neq 0$.
Dann ist $\psi_p \in \mathcal{L}$ und $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$.
Somit gilt für ein beliebiges $\psi \in \mathcal{L}$:

$$\psi = \psi_p + C \cdot \tilde{\varphi} = \psi_1 + C \cdot (\psi_2 - \psi_1) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

§ 28 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

28.1 Beispiel (freie Schwingung)

Die Gleichung

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \qquad (m, k > 0) \tag{F 28.1}$$

ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Allgemeine Theorie

28.2 Definition (lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, (in)homogen)

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $a_k \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen für $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion.
Die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x) \tag{F 28.2}$$

heißt **lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**.
Man nennt (F 28.2) **homogen**, wenn $s(x) = 0$ für alle $x \in I$, bzw. **inhomogen**, wenn $s(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in I$.
Eine Funktion $\varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Lösung** von (F 28.2), wenn $\varphi(x)$ für y eingesetzt die Gleichung (F 28.2) für alle $x \in I$ erfüllt.

28.3 Bezeichnung

$\mathcal{L}_{\text{hom}}$ sei die Menge alles Lösungen $\varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ der zu (F 28.2) gehörigen homogenen Differentialgleichung, also der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots \text{ü} a_0(x)y = 0 \tag{F 28.3}$$

$\mathcal{L}$ sei die Menge aller Lösungen $\psi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (F 28.2) aus 28.2.

28.4 Satz (Struktur von $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ und $\mathcal{L}$)

Vor: Gegeben sei die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_0(x)y = s(x) \tag{F 28.4}$$

mit a_k und s wie in 28.2.

Beh:

(a) $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$\text{Abb}(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \colon I \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ Abbildung} \right\}$$

mit $\dim \mathcal{L}_{\text{hom}} = n$.

(b) Ist $\psi \in \mathcal{L}$, so gilt

$$\mathcal{L} = \psi + \mathcal{L}_{\text{hom}} = \left\{ \psi + \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{L}_{\text{hom}} \right\}$$

28.5 Definition (Fundamentalsystem)

Eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ heißt (Lösungs-)**Fundamentalsystem** der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0$$

28.6 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Vor: Gegeben sei die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung (F 28.2) wie in 28.2. Weiter seien ψ_1, ψ_2 Lösungen von (F 28.2) auf I.

Beh: Ist für ein $x_0 \in I$

$$\begin{aligned} \psi_1(x_0) &= \psi_2(x_0) \\ \psi_1'(x_0) &= \psi_2'(x_0) \\ &\vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x_0) &= \psi_2^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}$$

so ist $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ für alle $x \in I$.

28.7 Beispiel (Anfangsbedingung)

Die Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung wird durch eine Anfangsbedingung noch NICHT eindeutig bestimmt.

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y = 0 \tag{F 28.5}$$

Wie durch Einsetzen in (F 28.5) leicht nachgeprüft werden kann, sind

$$\psi_1(x) := \cos(x) + \sin(x) \quad , \quad \psi_2(x) = \cos(x) - \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Lösungen von (F 28.5). Es gilt $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, aber $\psi_1 \neq \psi_2$.

28.8 Definition (Wronski-Matrix, Wronski-Determinante)

$I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $f_1, \ldots, f_n \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien $(n-1)$-mal differenzierbare Funktionen und $x \in I$. Dann heißt die Matrix

$$\mathcal{W}(x) := \begin{pmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \qquad (n \times n\text{-Matrix})$$

die **Wronski-Matrix** und ihre Determinante die **Wronski-Determinante** von $(f_1, \ldots, f_n)$ im Punkt $x \in I$.

28.9 Satz (Wronski-Kriterium für ein Fundamentalsystem)

Vor: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Interval. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seine Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung (F 28.2) wie in 28.2. Weiter sei $\mathcal{W}(x)$ die Wronski-Matrix von $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ im Punkt $x \in I$.

Beh: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ist ein Fundamentalsystem von (F 28.2).

(ii) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sind linear unabhängig.

(iii) $\det\big(\mathcal{W}(x)\big) \neq 0 \quad \forall\, x \in I$.

(iv) $\det\big(\mathcal{W}(x)\big) \neq 0$ für ein $x \in I$.

Bemerkung: Besonders nützlich ist (iv) $\Longrightarrow$ (i).

28.10 Beispiel (Wronski-Determinante)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + y = 0 \tag{F 28.6}$$

(i) Nach 28.4,(a) ist $\dim \mathcal{L}_{\text{hom}} = 2$.

(ii) $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch $\varphi - 1(x) = \cos(x)$, $\varphi_2(x) = \sin(x)$. φ_1, φ_2 sind Lösungen von (F 28.6).
Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$ linear unabhängig?
Wir berechnen die Wronski-Determinante im Punkt 0:

$$\det\left(\mathcal{W}(0)\right) = \det\left(\begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ -\sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$$

Nach 28.9 bildet $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von (F 28.6).

(iii) $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ Fundamentalsystem von (F 28.6) $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}_{\text{hom}} = \left\{ c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

28.11 Bemerkung (Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung)

Gegeben seien eine lineare inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung und zwei Lösungen $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}$. Dann ist $\varphi = \psi_1 - \psi_2 \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$, d. h. φ ist Lösung der dazugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung.

28.12 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Die Funktionen $f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = 3\exp(x) + \exp(x^2) \;,\; g(x) = 7\exp(x) + \exp(x^2) \;,\; h(x) = 5\exp(x) + \exp(-x^2) + \exp(x^2)$$

seien Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung (D) 2-ter Ordnung mit stetigen Koeffizienten.
Bestimmenb Sie alle Lösungen $\psi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von (D) mit $\psi(0) = 1$ und $\psi'(0) = 2$.

Lösung

(i) ψ ist nach 28.6 durch die beiden Anfnagsbedingungen eindeutig bestimmt.

(ii) Sei (D_h) die zu (D) gehörige homogene lineare Differentialgleichung. Nach 28.4 gilt

$$\mathcal{L} = \psi + \mathcal{L}_{\text{hom}}$$

mit $\psi \in \mathcal{L}$ und $\dim \mathcal{L}_{\text{hom}} = 2$.

(iii) Nach (ii) brauchen wir ein $\psi \in \mathcal{L}$ und ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von (D_h). Wähle $\psi = f \in \mathcal{L}$, $\varphi_1 = g - f \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$ (wegen 28.11 $(\varphi_1(x) = \psi\exp(x))$, $\varphi_2 = h - f \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$ (wegen 28.11) $(\varphi_2(x) = 2\exp(x) + \exp(-x^2))$.
Wegen

$$\det\left(\begin{pmatrix} \varphi_1(0) & \psi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right) = -4 \neq 0$$

ist $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von (D_h).

(iv) Aus (ii) und (iii) folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \Big\{\psi + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \;\Big|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= \Big\{3\exp(x) + \exp(x^2) + x_1 \cdot 4\exp(x) + c_2\big(2\exp(x) + \exp(-x^2)\big) \;\Big|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\Big\} \\ &\overset{(*)}{=} \Big\{\exp(x^2) + da_1\exp(x) + d_2\exp(-x^2) \;\Big|\; d_1, d_2 \in \mathbb{R}\Big\}\end{aligned}$$

zu $(*)$: „$\subset$“: $d_1 = 3 + 4c_1 + 2c_2\ ,\ d_2 = c_2$; „$\supset$“: $c_1 = \frac{1}{4}(-3 + d_1 - 2d_2)\ ,\ c_2 = d_2$

(v) Gesucht ist ein $\psi \in \mathcal{L}$ mit $\psi(0) = 1$ und $\psi'(0) = 2$.

$$\psi \in \mathcal{L} \overset{\text{(iv)}}{\Longrightarrow} \psi(x) = \exp(x^2) + d_1\exp(x) + d_2\exp(-x^2) \qquad (d_i \in \mathbb{R}) \qquad \text{(F 28.7)}$$

$$\Longrightarrow \psi(x) = 2x\exp(x^2) + d_1\exp(x) - 2d_2x\exp(-x^2) \qquad (d_i \in \mathbb{R}) \qquad \text{(F 28.8)}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen in (F 28.7) und (F 28.8) liefert die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}1 = \psi(0) = 1 + d_1 + d_2 \;&\Longrightarrow\; d_1 = -d_1 \\ 2 = \psi'(0) = d_1\end{aligned}\right\} \Longrightarrow\ d_1 = 2\ ,\ d_2 = -2$$

Somit ist $\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi(x) = \exp(x^2) + 2\exp(x) - 2\exp(-x^2)$$

die gesuchte Lösung.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \qquad \text{(F 28.9)}$$

mit $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.
(F 28.9) heißt **homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten (reellen) Koeffizienten**.

28.13 Notiz

(a) Da man $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ als konstante Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ interpretieren kann, gelten für die Differentialgleichung (F 28.9) alle Aussagen der allgemeinen Theorie dieses Paragrpahen.

(b) Die Lösungen von (F 28.9) sind stets auf ganze $\mathbb{R}$ definiert.

28.14 Vorüberlegung zu (F 28.9)

Welche Bedingung muss ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$, eine Lösung von (F 28.9) ist?
Durch Einsetzen von $\exp(\lambda x)$ in (F 28.9) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\big(\exp(\lambda x)\big)^{(n)} + a_{n-1}\big(\exp(\lambda x)\big)^{(n-1)} + \ldots + a_1\big(\exp(\lambda x)\big)' + a_0 \exp(\lambda x = 0 \\
&\iff \lambda^n \exp(\lambda x) + a_{n-1}\lambda^{n-1}\exp(\lambda x) + \ldots + a_1\lambda \exp(\lambda x) + a_0 \exp(\lambda x) = 0 \\
&\overset{\exp(\lambda x)>0}{\iff} \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0
\end{aligned}$$

28.15 Definition (charekteristisches Polynom)

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

heißt das zur Differentialgleichung (F 28.9) gehörige **charakteristische Polynom**.

28.16 Satz (Lösung einer Differentialgleichung)

Vor: $\lambda \in \mathbb{R}$ sei Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$ zur Differentialgleichung (F 28.9).

Beh: Die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$ ist Lösung von (F 28.9).

28.17 Beispiel (charakteristisches Polynom)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \tag{F 28.10}$$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$\chi(\lambda = 0 \iff (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda \in \{3, 2\}$.
Nach 28.16 sind

$\varphi_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi_1(x) = \exp(3x)$
$\varphi_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi_2(x) = \exp(2x)$

Lösungen von (F 28.10).

28.18 Satz (charakteristisches Polynom – Fundamentalsystem)

Vor: Das charateristische Polynom zur Differentialgleichung (F 28.9) hat n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Beh: $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ mit $\varphi_i\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi_i(x) = \exp(\lambda_i x)$ ist ein Fundamentalsystem von (F 28.9).

28.19 Satz (linear unabhängige Lösungen einer Differentialgleichung)

Ist $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ eine s-fache Nullstelle von $\chi(\lambda)$ zur Differentialgleichung (F 28.9), d. h. $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s \cdot q(\lambda$, so sind $\varphi_s, \ldots, \varphi_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = \exp(\lambda_0 x) \\
&\varphi_2(x) = x \cdot \exp(\lambda_0 x) \\
&\vdots \\
&\varphi_s(x) = x^{s-1} \exp(\lambda_s x)
\end{aligned}$$

s linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (F 28.9).

28.20 Beispiel (charakteristisches Polynom – Fundamentalsystem)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \tag{F 28.11}$$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$
$\chi(\lambda) = 0 \iff (\lambda - 3)^2 = 0 \iff \lambda = 3.$
Nach 28.19 sind $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi_1(x) = \exp(3x)$, $\varphi_2(x) = x \cdot \exp(3x)$, linear unabhängige Lösungen von (F 28.11).
$\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ist also ein Fundamentalsystem von (F 28.11).

28.21 Satz (linear unabhängige Lösungen)

Vor: $\lambda = \mu + \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sei eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms zur Differentialgleichung (F 28.9).

Beh: $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = \exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x) \\
&\varphi_2(x) = \exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x)
\end{aligned}$$

sind zwei linear unabhängige Lösungen von (F 28.9).

28.22 Beispiel (linear unabhängige Lösungen – Fundamentalsystem)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0 \qquad (k, m > 0) \tag{F 28.12}$$

$\gamma := \sqrt{\frac{k}{m}}$
$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m}$
$\chi(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 = -\frac{k}{m} \iff \lambda = \sqrt{-\frac{k}{m}} \iff \lambda \in \{\mathrm{i}\gamma, -\mathrm{i}\gamma\}.$

Zu $\lambda = 0 + \mathrm{i}\gamma$ erhalten wir nach 28.21 die beiden Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi_1(x) = \exp(0 \cdot x) \cdot \cos(\gamma x) = \cos(\gamma x)$$
$$\varphi_2(x) = \exp(0 \cdot x) \cdot \sin(\gamma x) = \sin(\gamma x)$$

φ_1, φ_2 sind linear unabhängig und da der Lösungsraum von (F 28.12) die Dimension 2 hat, bildet $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von (F 28.12).

28.23 Beispiel (Fundamentalsystem)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' = 2y' - 4y \tag{F 28.13}$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda + 4$$

Nullstellen von $\chi(\lambda)$ sind

$$\lambda_1 = -2\ ,\ \lambda_2 = 1 + \mathrm{i}\ ,\ \lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$$

Mit 28.16 und 28.21 erhalten wir 3 Lösungen

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

von (F 28.13), definiert durch

$$\varphi_1(x) = \exp(-2x)$$
$$\varphi_2(x) = \exp(x) \cdot \cos(x)$$
$$\varphi_3(x) = \exp(x) \cdot \sin(x)$$

Wegen

$$\det\left(\mathcal{W}(0)\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 10 \neq 0$$

ist nach 28.9 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ein Fundamentalsystem von (F 28.13).

28.24 Satz (linear unabhängige Lösungen)

Vor: $\lambda = \mu + \mathrm{i}\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (und damit auch $\overline{\lambda} = \mu - \mathrm{i}\omega$) sei eine s-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$.

Beh: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2s} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x) \\
\varphi_2(x) &= \exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x) \\
\varphi_3(x) &= x \cdot \exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x) \\
\varphi_4(x) &= x \cdot \exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x) \\
&\vdots \\
\varphi_{2s-1}(x) &= x^{s-1} \cdot \exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x) \\
\varphi_{2s}(x) &= x^{s-1} \cdot \exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x)
\end{aligned}$$

sind $2s$ linear unabhängige Lösungen der zu $P(\lambda)$ gehörigen Differentialgleichung.

28.25 Beispiel (Fundamentalsystem)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \tag{F 28.14}$$

Das dazugehörige charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2$$

hat die 2-fache Nullstelle $\lambda = \mathrm{i} = 0 + 1 \cdot \pi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Nach 28.24 erhalten wir 4 linear unabhängige Lösungen von (F 28.14): $\varphi_1, \ldots, \varphi_4 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \cos(x) \\
\varphi_2(x) &= \sin(x) \\
\varphi_3(x) &= x \cdot \cos(x) \\
\varphi_4(x) &= x \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

Wegen $\dim \mathcal{L} = 4$ bilden $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$ ein Fundamentalsystem von (F 28.14).

28.26 Zusammenfassung

Gegeben sei die lineare homogene Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \tag{F 28.15}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$.
Mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

erhält man folgende Lösungen zu (F 28.15):

Nullstelle von $P(\lambda)$	**Definition der Lösungsfunktionen von (F 28.15)**
$\lambda \in \mathbb{R}$	$\exp(\lambda x)$
$\lambda \in \mathbb{R}$ s-fache Nullstelle	**s Lösungen** $\exp(\lambda x)$ $x \cdot \exp(\lambda x)$ $\vdots$ $x^{s-1} \cdot \exp(\lambda x)$
$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\lambda = \mu \pm \mathrm{i}\omega$	**2 Lösungen** $\exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x)$ $\exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x)$
$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\lambda = \mu \pm \mathrm{i}\omega$ s-fache Nullstellen	**$2s$ Lösungen** $\exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x)$ $\exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x)$ $x \cdot \exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x)$ $x \cdot \exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x)$ $\vdots$ $x^{s-1} \cdot \exp(\mu x) \cdot \cos(\omega x)$ $x^{s-1} \cdot \exp(\mu x) \cdot \sin(\omega x)$

28.27 Satz (Existenzsatz)

Vor: $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $a_k \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion für $k = 0, \ldots, n-1$, $s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x) \tag{F 28.16}$$

$(c, d_0, \ldots, d_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$.

Beh: Es existiert eine Lösung

$$\psi \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von (F 28.16) mit

$$\psi(c) = d_0 \ , \ \psi'(c) = d_1 \ , \ \ldots \ , \ \psi^{(n-1)}(x) = d_{n-1}$$

ψ ist eindeutig bestimmt.

Inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

28.28 Vorbemerkungen

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = s(x) \tag{F 28.17}$$

mit $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion.
DIe zu (F 28.17) gehörige homogene Differentialgleichung bezeichnen wir mit $(\text{F } 28.17)_h$.
Nach Satz 28.4 ist die Menge aller Lösungen von (F 28.17) ein n-dimensionaler affiner Raum der Form

$$\mathcal{L} = \psi + \mathcal{L}_{\text{hom}} \qquad (\psi \in \mathcal{L})$$

Wir brauchen also nur eine Lösung von (F 28.17) bestimmen und erhalten mit den Lösungen zu $(\text{F } 28.17)_h$ alle Lösungen von (F 28.17).

Wie berechnet man ein $\psi \in \mathcal{L}$?

28.29 Variation der Konstanten

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ sei ein Fundamentalsystem von $(\text{F } 28.17)_h$.
Man macht den Ansatz

$$\psi(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\varphi_n(x) \tag{F 28.18}$$

mit $c_i \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen.

Variante 1 zur Berechnung der c_i

Die Ableitungen der Funktionen c_i erhält man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1'\varphi_1 + \ldots + c_n'\varphi_n &= 0 \\ c_1'\varphi_1' + \ldots + c_n'\varphi_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} &= s \end{aligned}$$

Die c_i sind dann Stammfunktionen zu den c_i'.

Variante 2 zur Berechnung der c_i (Matrixform)

Sei

$$\mathcal{W}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Matrix zum Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ im Punkt x. Nach 28.9 ist $\det(\mathcal{W}(x)) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. $\mathcal{W}(x)^{-1}$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
Die Funktion c_i' erhält man dann aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \mathcal{W}(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s(x) \end{pmatrix} \quad \forall\, x \in I$$

Die c_i sind dan die Stammfunktionen zu den c_i'.

Zur Erinnerung aus LAGeo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

28.30 Beispiel (Fundamentalsystem, spezielle Lösungen)

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + 4y' = \cos(2x) \tag{F 28.19}$$

Da $s(x) = \cos(2x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, dann $I = \mathbb{R}$ gewählt werden.

(i) Bestimmung eines Fundamentalsystems zu $(\text{F } 28.19)_h$:
Das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -4$.
$\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \exp(-4x)$, bilden ein Fundamentalsystem zu $(\text{F } 28.19)_h$.

(ii) Bestimmung einer speziellen Lösung ψ von (F 28.19):
(Variation der Konstanten, Variante 2)
Ansatz: $\psi(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{W}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \exp(-4x) \\ 0 & -4\exp(-4x) \end{pmatrix}$$

und $\det\left(\mathcal{W}(x)\right) \neq 0$.
Somit erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{-4\exp(-4x)} \begin{pmatrix} -4\exp(-4x) & -\exp(-4x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4\exp(-4x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos(2x) \\ -\frac{1}{4}\cos(2x)\cdot\exp(4x) \end{pmatrix}$$

Als Stammfunktionen zu c_i wählen wir

$$c_1(x) = \frac{1}{8}\sin(2x)$$
$$c_2(x) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{4}\cdot\frac{\exp(4x)}{20}\left(4\cos(2x) + 2\sin(2x)\right)$$

$(*)$ Formelsammlung Rottmann Seite 148, Nummer 133.
Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}\psi(x) &= c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) \\ &= \frac{1}{8}\sin(2x) + \left(-\frac{1}{40}\exp(4x)(2\cos(2x) + \sin(2x))\right)\cdot\exp(-4x) \\ &= \frac{1}{10}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x)\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (F 28.19) hat die Form $\tilde{\psi} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{10}\sin(2x) - \frac{1}{20}\cos(2x) + c_1 + c_2\exp(-4x) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

28.31 Spezielle Lösungsansätze

Gegeben sei die lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + ay' + by = s(x) \qquad (x \in I\ ,\ a, b \in \mathbb{R}) \tag{F 28.20}$$

Für einige Störfunktionen s gibt es spezielle Lösungsansätze zur Bestimmung einer Lösung von (F 28.20).
$\chi(\lambda)$ sei das charakteristische Polynom zu $(\text{F } 28.20)_h$.

(a) $s(x) = s_0 + s_1 x \qquad (s_0, s_1 \in \mathbb{R})$
Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} A_0 + A_1 x, & \text{falls } \chi(0) \neq 0 \\ x(A_0 + A_1 x), & \text{falls } \chi(0) = 0 \\ x^r(A_0 + A_1 x), & \text{falls } 0 \text{ } r\text{-fache Nullstelle von } \chi \end{cases}$$

Durch Einsetzen von ψ in (F 28.20) erhält man die Koeffizienten A_0 und A_1.

(b) $s(x) = s_0 \cdot \exp(\alpha x) \qquad (s_0, \alpha \in \mathbb{R})$
Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} A_0 \exp(\alpha x), & \text{falls } \chi(\alpha) \neq 0 \\ x^r A_0 \exp(\alpha x), & \text{falls } \alpha \text{ } r\text{-fache Nullstelle von } \chi \end{cases}$$

Durch Einsetzen von ψ in (F 28.20) erhält man A_0.

(c) $s(x) = s_0 \cos(\beta x)$ oder $s(x) = s_0 \sin(\beta x) \qquad (s_0, \beta \in \mathbb{R})$
Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} A_0 \cos(\beta x) + B_0 \sin(\beta x), & \text{falls } \chi(\mathrm{i}\beta) \neq 0 \\ x(A_0 \cos(\beta x) + B_0 \sin(\beta x)), & \text{falls } \chi(\mathrm{i}\beta) = 0 \end{cases}$$

Durch Einsetzen von ψ in (F 28.20) erhält man A_0 und B_0.

28.32 Beispiel (Fundamentalsystem, spezielle Lösungen)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' - y' = x - 1 \tag{F 28.21}$$

(i) Aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

erhalten wir das Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, wobei die $\varphi_i \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert sind durch

$$\varphi_1(x) = 1\ ,\ \varphi_2(x) = \exp(x)\ ,\ \varphi_3(x) = \exp(-x)$$

(ii) Bestimmung einer speziellen Lösung ψ von (F 28.21) mit 28.31.
Es ist

$$s(x) = -1 + x \quad \text{und} \quad \chi(0) = 0$$

Deshalb wählen wir den Ansatz

$$\varphi(x) = x(A_0 + A_1 x) = A_0 x + A_1 x^2$$

Einsetzen von ψ in (F 28.21)

$$(A_0 x + A_1 x^2)''' - (A_0 x + A_1 x^2)' = x - 1$$

liefert die Gleichung

$$-2A_1 x - A_0 = x - 1$$

Mit dem Koeffizientenvergleich folgt daraus

$$-2A_1 = 1 \implies A_1 = -\frac{1}{2}$$
$$-A_0 = -1 \implies A_0 = 1$$

Also ist $\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

spezielle Lösung von (F 28.21) (Probe!).

(iii) Die allgemeine Lösung $\tilde{\psi}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von (F 28.21) ist definiert durch

$$\tilde{\psi}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + c_1 + c_2 \exp(x) + c_3 \exp(-x)$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

28.33 Beispiel (spezielle Lösung)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' = \cos(2x) \tag{F 28.22}$$

Bestimmung einer speziellen Lösung von (F 28.22) mit Ansatz 28.31,(c):
$s(x) = \cos(2x)$, d. h. $s_1 = 1$, $\beta = 2$:
$\chi(2\mathrm{i}) \neq 0$, da 0 und -4 die Nullstellen von $\chi(\lambda)$ sind.
Ansatz

$$\psi(x) = A_0 \cos(2x) + B_0 \sin(2x)$$

Einsetzen von ψ in (F 28.22)

$$\big(A_0 \cos(2x) + B_0 \sin(2x)\big)'' + 4\big(A_0 \cos(2x) + B_0 \sin(2x)\big)' = \cos(2x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Daraus folgt

$$\cos(2x)(-4A_0 + 8B_0 - 1) + \sin(2x)(-4B_0 - 8A_0) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Wir erhalten

$$\begin{cases} -4A_0 + 8B_0 - 1 = 0, & \text{für } x = 0 \\ -4B_0 - 8A_0 = 0, & \text{für } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$A_0 = -\frac{1}{20}\ ,\ B_0 = \frac{1}{10}$$

Also ist $\psi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{1}{10}\sin(2x)$$

eine Lösung von (F 28.22).

28.34 Bemerkung (Lösung einer Differentialgleichung)

Vor: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall, $s_i\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen für $i = 1, \ldots, l$ und $s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $s(x) = s_1(x) + \ldots + s_l(x)$. $\psi_i\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = s_i(x) \tag{F 28.23}$$

für $i = 1, \ldots, l$.

Beh: $\psi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \ldots + \psi_l(x)$$

ist Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = s(x) \tag{F 28.24}$$

§ 29 Lineare Differantialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In vielen Anwendungen sind zeitlich variable Größen $y_1(t), \dots, y_n(t)$ in der Weise gekoppelt, dass $y_i'(t)$ nicht nur von $y_i(t)$ und t abhängt, sonder auch von den restlichen Größen $y_j(t)$, $j \neq i$.

29.1 Beispiel (Differentialgleichungssystem)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) + t \\ y_2'(t) = 3y_1(t) + 6y_2(t) + \sin(t) \end{cases} \tag{F 29.1}$$

In Matrixschreibweise lautet das System

$$y' = Ay + s(t)$$

wobei

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \ , \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \ , \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ , \ s(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

29.2 Definition (lineares Differentialgleichungssystem, homogen)

Es sei A eine rellwertige $n \times n$-Matrix und $s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $I \subset \mathbb{R}$ Intervall eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = Ay + s(x) \tag{F 29.2}$$

lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

$$y' = Ay \tag{F 29.3}$$

heißt **homogenes, lineares Differentialgleichungssystem** 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkung: (F 29.3) entspricht $(\text{F } 29.2)_h$.

Eine Funktion $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Lösung des Differentialgleichungssystems** (F 29.2) bzw. (F 29.3), wenn φ differenzierbar ist und

$$\varphi'(x) = A\varphi(x) + s(x) \quad \forall\ x \in I$$

bzw.

$$\varphi'(x) = A\varphi(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Bei (F 29.3) kann $I = \mathbb{R}$ gewählt werden.

29.3 Satz (Lösungsmenge)

(a) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ von (F 29.3) ist ein n-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V = \left\{ f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n \;\middle|\; f \text{ Abbildung} \right\}$.

(b) Es seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{L}_{\text{hom}}$. Dann gilt:
$\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_k(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

(c) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ von (F 29.2) ist ein n-dimensionaler affiner Unterraum von V und $\mathcal{L} = \psi + \mathcal{L}_{\text{hom}}$ mit $\psi \in \mathcal{L}$.

29.4 Satz (Lösung eines Differentialgleichungssystems)

Vor: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ Eigenvektor zu λ.

Beh: $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch $\varphi(x) = a \exp(\lambda x)$, ist Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

Beweis

Da λ Eigenwert von A zum Eigenvektor a ist, gilt:

$$\lambda a = Aa$$

Daraus erhalten wir

$$\varphi'(x) = \lambda a \exp(\lambda x) = Aa \exp(\lambda x) = A\big(a \exp(\lambda x)\big) = A\varphi(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

□

29.5 Satz (Fundamentalsystem zum Differentalgleichungssystems)

Vor: $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ sei eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ der Matrix A ($\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$ ist erlaubt). Die Abbildungen $\varphi_k \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seien defiiniert durch

$$\varphi_k(x) = \exp(\lambda_k x) a_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Beh: $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ist ein Fundamentalsystem zum Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay$$

d. h.

$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \left\{ c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n \;\middle|\; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

29.6 Beispiel (Lösung eines Differentialgleichungssystems)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} y \tag{F 29.4}$$

Die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 7$.

Zur Erinnerung an LAGeo:

$\chi_A(\lambda) = \det(A_\lambda \mathbb{E}) = \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 7\lambda.$

λ_1, λ_2 sind die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$.

Eigenvektoren von A sind $a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $\lambda_1 = 0$ und $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ für $\lambda_2 = 7$.

Zur Erinnerung an LAGeo:
Die Eigenvektoren a_i sind Lösungen des Linearen-Gleichungssystems $(A - \lambda_i \mathbb{E})x = 0$.

Nach 29.5 bilden die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\varphi_1(x) = \exp(\lambda_1 x) \cdot a_1 = \exp(0) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(x) = \exp(\lambda_2 x) \cdot a_2 = \exp(7x) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(7x) \\ 3\exp(7x) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$.
Die allgemeine Lösung $\varphi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von (F 29.4) hat somit die Form

$$\varphi(x) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \exp(7x) \\ 3\exp(7x) \end{pmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Notiz

Aus einer Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = a \in \mathbb{R}^2$ kann man c_1 und c_2 berechnen und erhält eine eindeutige Lösung zu dieser Anfangsbedingung.

29.7 Anmerkung

Zu $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit komplexen Eigenwerten siehe [Fo2], §16, Beispiel (16.2).

29.8 Weitere Methode zum Lösen eines einfachen Differentialgleichungssystems (Staatsexamensaufgabe)

Bestimmen Sie die Gesamtheit der Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{cases} (\alpha) & x'(t) = 2x(t) - y(t) + t \\ (\beta) & y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \qquad \text{(F 29.5)}$$

Hinweis: Lösen Sie die erste Gleichung nach $y(t)$ auf und bilden Sie die Ableitung. Mit Hilfe der 2. Gleichung erhalten Sie dann eine Differentialgleichung 2. Ordnung in der einen Variable $x(t)$.

Lösung:

(i) $(\alpha) \implies (\gamma) \quad y(t) = -x'(t) + 2x(t) + t \implies (\delta) \quad y'(t) = -x''(t) + 2x'(t) + 1$
Einsetzen von (γ) und (δ) in (β) ergibt

$$-x''(t) + 2x'(t) + 1 = x(t) + 2\big(-x'(t) + 2x(t) + t\big) \implies -x''(t) + 4x'(t) - 5x(t) = 2t - 1$$

$$\Longrightarrow\ x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 1 - 2t \qquad \text{(F 29.6)}$$

(F 29.6) ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koefizienten.

(ii) Lösen von (F 29.6):
Das charakteristische Polynom zu $(\text{F } 29.6)_h$ lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Als Nullstellen von $\chi(\lambda)$ erhalten wir $\lambda_{1/2} = 2 \pm \mathrm{i}$.
Nach 28.21 ist $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi(t) = c_1 \exp(2t) \cdot \cos(t) + c_2 \exp(2t) \cdot \sin(t)$$

eine allgemeine Lösung von $(\text{F } 29.6)_h$.
Bestimmung einer Lösung ψ mit 28.31,(a):
Ansatz

$$\psi(t) = A_0 + A_1 t$$

da $\chi(0) \neq 0$.
Einsetzen von ψ in (F 29.6):

$$(A_0 + A_1 t)''4(A_0 + A_1 t)' + 5(A_0 + A_1 t) = 1 - 2t$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ -4A_1 + 5A_0 + 5A_1 t = 1 - 2t \\
&\Longrightarrow\ \begin{cases} -4A_1 + 5A_0 = 1 & \Longrightarrow\ A_0 = \frac{1+4A_1}{5} \\ 5A_1 = -2 & \Longrightarrow\ A_1 = -\frac{2}{5} \end{cases} \\
&\Longrightarrow\ A_1 = -\frac{2}{5}\ ,\ A_0 = -\frac{3}{25}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\psi(t) = -\frac{3}{25} - \frac{2}{5}t$$

Lösung von (F 29.6).
Die allgemeine Lösung $\tilde{\psi}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von (F 29.6) ist definiert durch

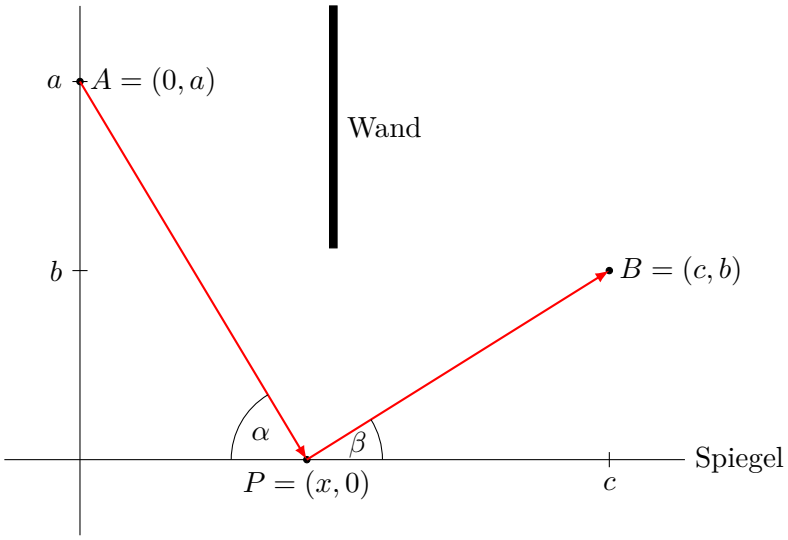
$$\tilde{\psi}(t) = -\frac{3}{25} - \frac{2}{5}t + \exp(2t)(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

(iii) Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}
x(t) &\overset{\text{(ii)}}{=} \tilde{\psi}(t) \\
y(t) &\overset{(\gamma)}{=} \ldots = \frac{4}{25} + \frac{1}{5}t + \exp(2t)(-c_2 \cos(t) + c_1 \sin(t)) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Probe!

Anhang A Anwendungen der Differentialrechnung – zu 14.1,(a)

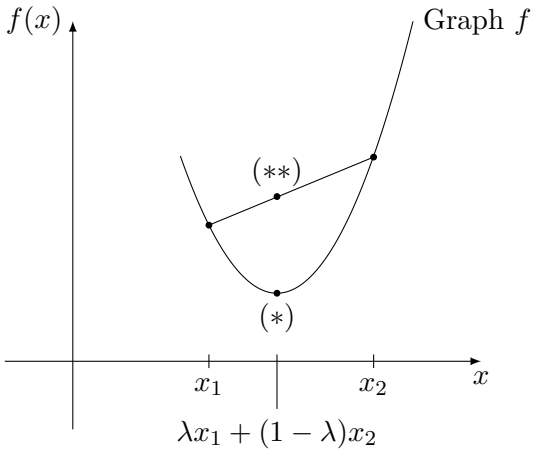


Ein Lichtstrahl „laufe“ vom Punkt $A = (0, a)$ zu einem Punkt $B = (c, b)$, indem er im Punkt $P = (x, 0)$ gespiegelt wird.

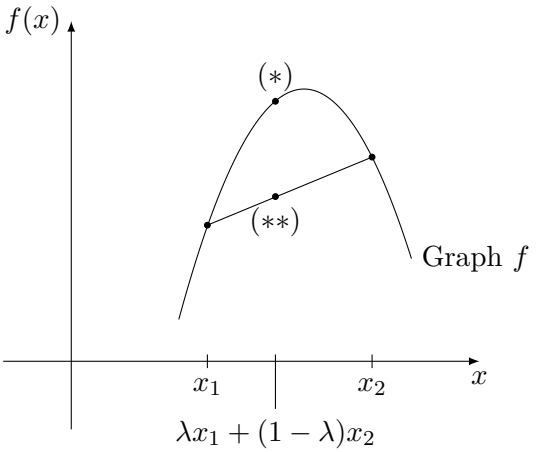
Was kann man über die Winkel α und β aussagen?
Physik (Fermatsches Prinzip): Der Reflexionspunkt P liegt so, dass der Weg des Lichtstrahls minimal ist.

Anhang B Konvexe und konkave Funktionen

▽ Die Bezeichnung für konvex und konkav ist in der Literatur NICHT einheitlich!



konvexe Funktion



konkave Funktion

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **konvex** (bzw. streng konvex, bzw. konkav, bzw. streng konkav)
$:\Longleftrightarrow$ $\forall\, x_1, x_2 \in D$ und alle $\lambda \in]0,1[$ gilt

$$\underbrace{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)}_{(*)} \leq \underbrace{\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}_{(**)}$$

(bzw. $<$)

(bzw. $\geq$)

(bzw. $>$)

Notizen

(a) f konvex (bzw. streng konvex $\Longleftrightarrow$ $-f$ konvex (bzw. streng konvex)

(b) Lineare Funktionen, d. h. Funktione $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$, sind konvex und konkav.

Satz 1

Vor: $f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine zweimal differenzierbare Funktion, $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $c \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

Beh:

$$f \left\{ \begin{array}{c} \text{konvex} \\ \text{streng konvex} \\ \text{konkav} \\ \text{streng konkav} \end{array} \right\} \iff f''(x) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ > \\ \leq \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \forall\, x \in]a,b[$$

Bemerkung

$f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine konkave Funktion, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $x_1,\ldots,x_n \in]a,b[$.
Dann gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Beweis

durch vollständige Induktion über n.

□

Satz 2 – Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

Vor: $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n > 0$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $a_1,\ldots,a_n > 0$

Beh:

$$\underbrace{a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n}}_{\text{gewichtetes geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\lambda_1 a_i + \ldots + \lambda_n a_n}_{\text{gewichtetes arithmetisches Mittel}}$$

Beweis

Aus Satz 1 folgt, dass die Funktion $\ln\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (streng) konkav ist, denn $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ und somit $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x \in [0,\infty[$.
Daraus folgt

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \overset{\text{Bemerkung}}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(a_i) \overset{\text{Rechenregel}}{\underset{\ln}{=}} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(a_i^{\lambda_i}\right) \overset{\text{Funktionalgleichung}}{\underset{\ln}{=}} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}\right)$$

Durch Anwendung der exp-Funktion, die monoton wachsend ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}$$

□

Anhang C Definitionen aus der linaren Algebra bzw. Geometrie

A sei eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix über $\mathbb{R}$.

Definitionen

- A heißt **positiv definit**, falls

$$\langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

- A heißt **negativ definit**, falls

$$\langle x, Ax \rangle < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

- A heißt **indefinit**, falls es $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\langle x, Ax \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle y, Ay \rangle < 0$$

Notiz

(a) A positiv (negativ) definit $\iff$ alle Eigenwerte von A sind positiv (negativ)

(b) A indefinit $\iff$ A besitzt mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert

(c) Im Fall $n = 2$ gilt für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

A positiv (negativ) definit $\iff$ $\det(A) > 0$ und $a > 0$ $(a < 0)$
A indefinit $\iff$ $\det(A) < 0$

Stichwortverzeichnis

A

abgeschlossen ... 77
Ableitung ... 9
    in Richtung von v ... 92
    partielle ... 85
Abstand ... 70

B

beschränkt ... 72

C

Cauchy-Folge ... 72

D

Differential ... 90
Differentialgleichung
    1. Ordnung ... 101
    homogene ... 116
    inhomogene ... 116
    Lösung ... 101, 116
    lineare, n-ter Ordnung ... 116
Differentialgleichungssystem
    homogenes, lineares ... 132
    Lösung ... 132
    lineares ... 132
Differentialquotient ... 1
Differenzenquotient ... 1
differenzierbar ... 90
    k-mal ... 9
    k-mal stetig ... 9
    partiell ... 85, 87
    stetig partiell ... 87
    total ... 90
differenzierbar im Punkt ... 1
    k-mal ... 8
divergent ... 71

E

ε-Umgebung
    abgeschlossene ... 71
    offene ... 71
Extremum ... 13
    isoliertes ... 13
    lokales ... 94

F

Flächeninhalt ... 31
Folge im $\mathbb{R}^n$ ... 70
Fundamentalsystem ... 117
Funktion
    stetig ... 73
Funktional-Matrix ... 90

G

Gaußsches Fehlerintegral ... 49
Gradient ... 87
Grenzwert ... 71

H

Hesse-Matrix ... 95

I

Integral ... 25

J

Jacobi-Matrix ... 90

K

Koeffizienten
    der Potenzreihe ... 58
kompakt ... 77
konvergent ... 56, 71
Konvergenz
    absolute ... 60
    gleichmäßig ... 60
    punktweise ... 60
Konvergenzbetrachtungen ... 59
Konvergenzradius ... 59

Koordinatenfolge 71
Kurve 79
differenzierbar 79
geschlossen 79
nicht-singulär . . . . . *siehe* regulär
regulär 84
rektifizierbar 81
stetig differenzierbar 79

L

Limes superior 61
Lipschitz-Bedingung
globale 102
lokale 102
Lipschitz-Konstante 102

M

Maximum 13
isoliertes lokales 94
lokales 94
Metrik 70
Minimum 13
isoliertes lokales 94
lokales 94

N

Niveaumenge 85
Norm 69

P

Polygonzug 81
Polynom 74
charakteristisches 121
Potenzreihe 58
Produktregel 3
Punkt
kritischer 94

Q

Quotientenregel 3

R

Rand 77
Randpunkt 77
Riemann-Integral 26
Riemann-integrierbar 26
Riemannsche Summe 28

S

Sattelpunkt 96
Sphären 86
Spur 79
Stammfunktion 34

T

Tangente 10
Tangentialvektor 83
Taylorpolynom 19
Taylorreihe 67
Teilfolge 72
Treppenfunktion 24

U

Umgebung 77
offene 77
Unterteilung
feiner 25
Feinheit 28

W

Wronski-Determinante 118
Wronski-Matrix 118