Analysis I

Universität Regensburg

(Dr. Werner Stich)

Julian Palme

(Stand: 22. Juni 2014)

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung 'Analysis I', gelesen von Herrn Dr. Werner Stich an der Universität Regensburg. Dieses Dokument ist KEIN offizielles Skript und wurde gesetzt in LaTeX von Julian Palme.

Inhaltsverzeichnis

Grundlagen **1**

§ 1 Bezeichnungen und elementare Aussagen **1**
1.1 Bezeichnungen von Zahlbereichen . . . 1
1.2 Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion . . . 1
1.3 vollständige Induktion (Bsp) . . . 1
1.4 Beispiel . . . 2
1.5 Bernoullische Ungleichung (Satz) . . . 3
1.6 Bemerkung . . . 3
1.7 Definition . . . 4
1.8 Beispiel . . . 4
1.9 Bemerkung . . . 4
1.10 zu 1.9, (f) und (g) (Bsp) . . . 5
1.11 Binomischer Lehrsatz (Satz) . . . 6
1.12 Folgerungen aus 1.11 . . . 7
1.13 Endliche geometrische Reihe (Satz) . . . 7
1.14 (Bsp) . . . 8
1.15 zu 1.14 (Bem) . . . 8
1.16 Abbildungen: Definitionen und Beispiele . . . 9

§ 2 Axiomatische Definition der rellen Zahlen **10**
2.1 Einführung . . . 10
2.2 Kurzfassung des Axiomensystems für die reellen Zahlen . . . 10
2.3 Körperaxiome . . . 11
2.4 Bezeichnung . . . 12
2.5 (Bem) . . . 12
2.6 (Bem) . . . 12
2.7 Notiz . . . 13
2.8 Anordnungsaxiome . . . 13
2.9 Definition und Notiz . . . 14
2.10 (Bem) . . . 14
2.11 (Bem) . . . 15
2.12 Maximum, Minimum, Betrag reeller Zahlen (Def) . . . 15
2.13 Notiz . . . 15
2.14 (Bem) . . . 15
2.15 Dreiecksungleichung (Satz) . . . 16
2.16 Folgerung aus der Dreiecksungleichung . . . 16
2.17 (Def) . . . 16
2.18 (Bsp) . . . 17
2.19 (Bem) . . . 17
2.20 Vollständigkeitsaxiom . . . 17
2.21 (Bem) . . . 17
2.22 Notiz . . . 17
2.23 Die natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ . . . 18
2.23.1 (Def) . . . 18
2.23.2 (Bsp) . . . 18
2.23.3 (Def) . . . 18
2.23.4 (Bem) . . . 18
2.24 Prinzip von Archimedes (Satz) . . . 18

2.25 Folgerungen aus dem Prinzip von Archimedes 18

§ 3 Komplexe Zahlen 20
3.1 Notiz 20
3.2 Rechengesetze in $\mathbb{C}$ 20
3.3 (Bem) 21
3.4 (Def) 21
3.5 Geometrische Interpretation von $\overline{z}$ 21
3.6 (Bem) 22
3.7 (Def) 22
3.8 Der Betrag einer komplexen Zahl (Graphische Erläuterung) 23
3.9 (Bem) 23
3.10 (Satz) 24
3.11 Geometrische Interpretation der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen in der GZE 24
3.12 Worin bestehen die wesentlichen Unterschiede zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$? 25
3.13 Rechnen in $\mathbb{C}$ (Bsp) 26

***Grenzwerte und Stetigkeit* 27**

§ 4 Folgen, Grenzwerte 27
4.1 Fragen 27
4.2 (Def) 28
4.3 Schreibweisen für Folgen 28
4.4 Folgen (Bsp) 28
4.5 Graphische Darstellung von Folgen 29
4.6 (Def) 30
4.7 Notiz 30
4.8 (Def) 31
4.9 (Bem) 31
4.10 (Def) 31
4.11 (Bem) 32
4.12 (Bsp) 32
4.13 (Bem) 33
4.14 Anschauliche Überlegung zur Eindeutigkeit des Grenzwertes 34
4.15 Eindeutigkeit des Grenzwertes (Satz) 34
4.16 (Satz) 35
4.17 Notiz 35
4.18 (Bsp) 35
4.19 Harmonische Reihe (Satz) 36
4.20 (Def) 36
4.20.1 Beispiel 36
4.21 Konvergenz und Beschränktheit eine monotonen Folge (Satz) 37
4.22 Rechenregeln für Grenzwerte (Satz) 38
4.23 Rechnen mit Grenzwerten (Bsp) 38
4.24 Nullfolge (Bem) 39
4.25 Sandwich-Theorem (Satz) 40
4.26 Notiz 40
4.27 Anwendung des Sandwich-Theorems (Bsp) 40
4.28 bestimmt divergente Folge (Def) 41
4.29 bestimmt divergente Folge (Bsp) 41
4.30 Notiz 41

4.31 Bemerkung . . . 41
4.32 Beispiele . . . 42
4.33 Bemerkung . . . 42
4.34 Teilfolge (Def) . . . 42
4.35 Beispiel . . . 42
4.36 Bemerkung . . . 43
4.37 Satz von Bolzano Weierstraß für Folgen (Satz) . . . 43
4.38 Beispiel . . . 43
4.39 Häufungspunkt (Def) . . . 43
4.40 Beispiele . . . 43
4.41 Intervallschachtelung (Def) . . . 43
4.42 Prinzip der Intervallschachtelung (Satz) . . . 44
4.43 Bemerkung und Definition . . . 44
4.44 Bemerkung . . . 45
4.45 Cauchy-Folge (Def) . . . 45
4.46 Satz . . . 45
4.47 Anmerkung . . . 45

§ 5 Unendliche Reihen 46
5.1 Zahlenbeipsiele . . . 46
5.2 Partialsumme, unendliche Reihe (Def) . . . 46
5.3 Anmerkung . . . 46
5.4 Beispiel . . . 46
5.5 unendliche geometrische Reihe (UGR) (Satz) . . . 47
5.6 Beispiele . . . 47
5.7 Rechenregeln für unendliche Reihen (Satz) . . . 48
5.8 Darstellung einer periodischen Dezimalzahl als rationale Zahl (Bsp) . . . 49

***Konvergenzkriterien für Reihen* 49**
5.9 Cauchysches Konvergenzkriterium (CKK) (Satz) . . . 49
5.10 Bemerkung . . . 49
5.11 Satz . . . 49
5.12 Anmerkung . . . 50
5.13 Beispiele . . . 50
5.14 Satz . . . 50
5.15 Bemerkung . . . 51
5.16 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen (Satz) . . . 51
5.17 Beispiel . . . 52
5.18 absolut konvergent (Def) . . . 52
5.19 Bemerkung . . . 52
5.20 Anmerkung . . . 52
5.21 Majorantenkriterium (Satz) . . . 53
5.22 Minorantenkriterium (Satz) . . . 53
5.23 Beispiele für divergente Reihen . . . 53
5.24 Teil einer SE-Aufgabe (Bsp) . . . 54
5.25 Anmerkung . . . 54
5.26 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 55
5.27 Quotientenkriterium (QK) (Satz) . . . 55
5.28 Teil einer Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 56
5.29 Notizen . . . 56
5.30 Satz . . . 57
5.31 Wurzelkriterium (WK) (Satz) . . . 57

5.32 Beispiel . . . 57
5.33 Satz . . . 58
5.34 Limesform von QK und WK (Satz) . . . 58
5.35 Teil einer Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 58

§ 6 Ergänzungen zur Menge der reellen Zahlen 60
6.1 adischer Bruch (Def) . . . 60
6.2 Notiz . . . 60
6.3 Beispiele . . . 60
6.4 Satz . . . 60
6.5 Satz . . . 61
6.6 Frage 1 . . . 61
6.7 Frage 2 . . . 62

§ 7 Stetige Funktionen 63
7.1 stetige Funktion (Def) . . . 63
7.2 Anmerkungen . . . 63
7.3 Epsilon-Delta-Kriterium für die Stetigkeit (Satz) . . . 63
7.4 Satz . . . 64
7.5 Satz . . . 64
7.6 Beispiele für stetige Funktionen . . . 65
7.7 Beispiele für Stetigkeit und Unstetigkeit . . . 66

§ 8 Sätze über stetige Funktion 67
8.1 Satz . . . 67
8.2 Satz . . . 67
8.3 Beispiel . . . 68
8.4 Bemerkung . . . 68
8.5 Existenz von Minimum und Maximum (Satz) . . . 68
8.6 Notiz . . . 68
8.7 Fixpunkt (Def) . . . 68
8.8 Bemerkung . . . 68
8.9 (streng) monoton wachsend/fallend (Def) . . . 68
8.10 Satz . . . 69
8.11 Satz über die Umkehrfunktion (Satz) . . . 69
8.12 Notiz . . . 69
8.13 Bemerkung . . . 69
8.14 gleichmäßig stetige Funktion (Def) . . . 70
8.15 Bemerkung . . . 70
8.16 Satz . . . 70
8.17 Beispiele . . . 70

§ 9 Grenzwerte und Funktionen 71
9.1 Fragen . . . 71
9.2 Häufungspunkt einer Menge (Def) . . . 71
9.3 Beispiele . . . 71
9.4 Definition . . . 71
9.5 Notiz . . . 72
9.6 Beispiel . . . 72
9.7 Epsilon-Delta-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen (Satz) . . . 72
9.8 Rechenregeln (Satz) . . . 72
9.9 Satz . . . 73

9.10 Funktion aus einer Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 73
9.11 Definition . . . 73
9.12 Satz . . . 73
9.13 links- bzw. rechtsseitig stetige Funktion (Def) . . . 74
9.14 Notiz . . . 74
9.15 Beispiel . . . 74
9.16 Weitere Bezeichnungen für Grenzwerte von Funktionen . . . 74

§ 10 Die Exponentialfunktion 75
10.1 Satz und Definition . . . 75
10.2 Satz . . . 75
10.3 Resttermabschätzung (Satz) . . . 75
10.4 Notiz . . . 75
10.5 Vorüberlegungen zum Cauchy-Produkt von Reihen . . . 75
10.6 Cauchy-Produkt (Def) . . . 76
10.7 Satz . . . 76
10.8 Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz) . . . 76
10.9 Notiz und Definition . . . 76
10.10 Bemerkung . . . 77
10.11 Satz . . . 77
10.12 Satz . . . 77
10.13 Satz und Definition . . . 77
10.14 Werte, Grenzwerte und Graphen zu cosh und *sinh* . . . 77

§ 11 Der natürliche Logarithmus ud die allgemine Exponentialfunktion 79
11.1 Satz und Definition . . . 79
11.2 Anmerkung . . . 79
11.3 Funktionalsgleichung fpr den natürlichen Logarithmus (Satz) . . . 79
11.4 allgemeine Exponentialfunktion (Def) . . . 79
11.5 Satz . . . 79
11.6 Bemerkung . . . 80
11.7 Staatsexamensaufgabe (Bsp) . . . 80
11.8 allgemeine Logarithmusfunktion (Def) . . . 80
11.9 Bemerkung . . . 80
11.10 Bemerkung . . . 81
11.11 Satz . . . 81
11.12 Bemerkung . . . 81
11.13 1024-Bit Verschlüsselung (Bsp) . . . 81

§ 12 Komplexe Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen 82

***Folgen und Reihen komplexer Zahlen* 82**
12.1 konvergente Folge (Def) . . . 82
12.2 Satz . . . 82

***Komplexe Exponentialfunktion* 82**
12.3 Satz und Definition . . . 82
12.4 Notiz . . . 82
12.5 Satz . . . 82
12.6 Satz . . . 83
12.7 Eulersche Formel (Def) . . . 83
12.8 Satz . . . 83

12.9 Bezeichnung (Bem) . . . 83
12.10 Satz . . . 83
12.11 Satz . . . 84
12.12 Resttermabschätzung für cos und sin (Satz) . . . 84
12.13 Bemerkung . . . 84
12.14 Satz . . . 84
12.15 Bemerkung . . . 84
12.16 Bemerkung . . . 85
12.17 Bemerkung . . . 85
12.18 Nullstellen von *sin* und *cos* (Bem) . . . 85
12.19 Tangens, Cotangens (Def) . . . 85
12.20 Bemerkung . . . 86
12.21 Satz . . . 86
12.22 Umkehrfunktionen (Def) . . . 86
12.23 Beispiel . . . 87
12.24 Geometrische Interpretation von Tangens und Cotangens . . . 87

Anhang A Abbilungen – Definitionen und Sätze **88**
A.1 Definitionen . . . 88
A.2 Beispiele . . . 89

Stichwortverzeichnis

Grundlagen

§ 1 Bezeichnungen und elementare Aussagen

1.1 Bezeichnungen von Zahlbereichen

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2 \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2 \ldots\}$
$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2 \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq 0 \right\}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$:=Menge der reellen Zahlen (werden in § 2 durch Axiome beschrieben)
$\emptyset$:=leere Menge

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a - m + a_{m+1} + \ldots + a_n \quad \text{für } m \leq n$$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \quad \text{für } m > n \text{ (leere Summe)}$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{für } m \leq n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \quad \text{für } m > n \text{ (leeres Produkt)}$$

$a^0 := 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

1.2 Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.
Zeige:

(1) **(Induktionsanfang)**
$A(n)$ ist wahr für $n = n_0$.

(2) **(Induktionsschritt)**
Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$ (d. h. ist $A(n)$ wahr, so ist auch $A(n+1)$ wahr).

Dann ist $A(n)$ wahr für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

1.3 Beispiel (vollständige Induktion)

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$7^n - 1 \text{ ist Vielfaches von } 6$$

Zu zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $q \in \mathbb{N}$ mit

$$7^n - 1 = q \cdot 6$$

Beweis (durch vollständige Induktion)

(1) Induktionsanfang

$n_0 = 0$

linke Seite: $7^0 - 1 = 0$; rechte Seite: Für $q = 0$ gilt $0 \cdot 6 = 0$

also: linke Seite = rechte Seite

(2) Induktionsschritt

Induktionsannahme: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$7^n - 1 = q \cdot 6 \quad \text{mit } q \in \mathbb{N}$$

Zu Zeigen: Es existiert ein $q' \in \mathbb{N}$ mit $7^{n+1} - 1 = q' \cdot 6$

Ausführung

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 \overset{\text{I.A.}}{=} 7 \cdot (q \cdot 6 + 1) - 1 = 42q + 6 = \underbrace{(7 \cdot q + 1)}_{=:q' \in \mathbb{N}} \cdot 6$$

□

1.4 Beispiel

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$?

n	2^n	n^2	$2^n > n^2$
0	1	0	w
1	2	1	w
2	4	4	f
3	8	9	f
4	16	16	f
5	32	25	w
6	64	36	w

Beh: Die Aussage $2^n > n^2$ ist für $n \in \{0, 1\}$ und $n \geq 5$ richtig. Für $n \in 2, 3, 4$ ist die Aussage falsch.

Beweis

Für $0 \leq n \leq 4$ siehe Tabelle oben.

Für $n \geq 5$ durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n_0 = 5$ ✓ (siehe Tabelle)

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n + 1$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$ gelte $2^n > n^2$.

Zu zeigen: $2^{n+1} > (n+1)^2$ für $n \geq 5$

Ausführung

linke Seite: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.A.}}{>} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 \overset{(*)}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

zu $(*)$: $n^2 > 2n + 1 \iff n^2 - 2n > 1 \iff n^2 - 2n + 1 > 2 \iff (n-1)^2 > 2$

Diese Aussage ist für $n \geq 3$ wahr.

„$(n-1)^2 > 2$“ ist für $n \geq 3$ wahr, also ist wegen äquivalenter Umformung auch „$n^2 > 2n+1$“ für $n \geq 3$ wahr.

□

1.5 Satz (Bernoullische Ungleichung)

Vor: $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -1$
Beh: $(1+a)^n \geq 1 + na$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis (durch vollständige Induktion)

Ind. Anfang: $n_0 = 0$
linke Seite=$(1+a)^0 = 1 \;\geq\; 1 = 1 + 0 \cdot a$ =rechte Seite ✓
Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$
Induktionsannahme: $(1+a)^n \geq 1 + na$ sei richtig für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Zusätzlich sei $a \geq -1$.
Zu zeigen: Für $a \geq -1$ gilt

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$$

Ausführung:
Nach Induktionsannahme gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + na \overset{a \geq -1 \Rightarrow (1+a) \geq 0}{\Longrightarrow} (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)\cdot(1+a)$$
$$\Longrightarrow\; (1+a)^{n+1} \geq 1 + na + a + \underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)a$$

□

1.6 Bemerkung

(a) (Veralgemeinerte Bernoulli-Ungleichung)
Gegeben seien die Reelen Zahlen $a_1, \ldots, a_n \geq 0$. Dann gilt

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

(b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

Beweis

(a)

siehe Übung

(b)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+n\cdot\frac{1}{n}\right) = 2$$

□

1.7 Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n \quad \text{(gesprochen } n \text{ Fakultät)}$$
$$0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1 \quad \text{(leeres Produkt)}$$

Für $n, k \in \mathbb{N}$ heißt

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} & \text{für } k \geq 1 \\ 1 & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Binomialkoeffizient.

1.8 Beispiel

$$\binom{3}{2} = \prod_{j=1}^{2} \frac{3-j+1}{j} = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$$
$$\binom{3}{3} = \prod_{j=1}^{3} \frac{3-j+1}{j} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3} = 1$$
$$\binom{2}{4} = \prod_{j=1}^{4} \frac{2-j+1}{j} = \frac{2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0$$

1.9 Bemerkung

Es seien $k, n \in \mathbb{N}$.

(a) Für $k > 0$ gilt: $\binom{n}{k} = 0$

(b) Für $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

(c) $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für alle $k, n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elemntigen Menge ($k, n \in \mathbb{N}^*$) ist gleich $\binom{n}{k}$. Insbesondere ist also $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$ für $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist $n!$ die Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte anzuordnen.

Beweis

(a)

Für $k > n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1) \cdot \overbrace{(n-(n+1)+1)}^{=0} \cdot \ldots}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = 0$$

(b)

$0 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &\overset{1.7}{=} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n-k)!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(n-k)+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} = \prod_{j=1}^{n-k} \frac{n-j+1}{j} \overset{1.7}{=} \binom{n}{n-k}
\end{aligned}$$

(c), (d), (e) siehe Übungsaufgaben
(f), (g) siehe Anhang A 1.1

□

1.10 Beispiel (zu 1.9, (f) und (g))

(a) $M = \{1, 2, 3\}$, 2-elementige Teilmengen von M sind $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$;

$$\binom{3}{2} \overset{1.9,(b)}{=} \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{(Kombinationsmöglichkeiten)}$$

(b) Lotto: Anzahl der 6-elementigen Teilmengen einer 49-elementigen Menge:

$$\binom{49}{6} \overset{1.9,(b)}{=} \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = 13\,983\,816$$

(c) Anzahl der Anordnungen von 3 verschiedenen Objekten a, b, c. Es gibt $3! = 6$ Anordnungen:

$$abc \ , \ acb \ , \ bac \ , \ bca \ , \ cab \ , \ cba$$

(d) Anzahl der möglichen Aufstellungsvarianten von 170 Übungsteilnehmer (Spaziergang ins Reich der großen Zahlen):

$$170!$$

(e) Klasse mit 18 SchülerInnen: Anzahl der verschiedenen Sitzordnungen

$$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000 \quad \text{(über 6 Billiarden)}$$

Wenn jede Sekunde eine Sitzordnung durchgeführt wird, braucht man 2 024 632 446 Jahre (mehr als 2 Milliarden Jahre)

1.11 Satz (Binomischer Lehrsatz)

Vor: $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

Beh:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Beweis (durch vollständige Induktion)

Induktionsanfang $n_0 = 0$

L.S.: $(x+y)^0 = 1$

R.S.: $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \underbrace{\binom{0}{0}}_{=1} \underbrace{x^0}_{=1} \cdot \underbrace{y^0}_{=1} = 1$

L.S. = R.S. ✓

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$

Induktionsannahme: Für jedes beliebige aber feste $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{, wobei } x, y \in \mathbb{R} \text{ sind}$$

zu zeigen: $(x+y)^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \quad x, y \in \mathbb{R}$

Ausführung: $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \overset{\text{I.A.}}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{1+k} \\
&\overset{\substack{k=0,k=n \\ \text{abspalten}}}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}}_{\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^{(k-1)+1}} + y^{n+1} \\
&\overset{1.9}{=} \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{\overset{1.9}{=}\binom{n+1}{k}} x^{n+1-k} y^k + \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

□

1.12 Folgerungen aus 1.11

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(b) Die Anzahl aller Teilmengen einer n-elemntigen Menge ist 2^n.

(c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Beweis

(a) $2^n = (1+1)^n \overset{\text{BLS}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(b) Folgt aus (a) und 1.9,(f)

(c) (Beachte: $0^0 = 1$): $0 = 0^n = \big(1 + (-1)\big)^n \overset{\text{BLS}}{=} \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

□

1.13 Satz (Endliche geometrische Reihe)

Vor: $x \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{N}$

Beh:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{für } x \neq 1 \end{cases}$$

Beweis

Für $x = 1$ klar.

Sei $x \neq 1$. (Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n_0 = 0$

$$\text{L.S.} = \sum_{k=0}^{n} x^k = x^0 = 1 = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x} = \text{R.S.} \quad \checkmark$$

Induktionsschritt: $n \longrightarrow n+1$

Induktionsannahme: Für jedes beliebige aber feste $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{für } x \neq 1 \end{cases}$$

zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \begin{cases} (n+1)+1 & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{1 - x^{(n+1)+1}}{1 - x} & \text{für } x \neq 1 \end{cases}$$

Ausführung: $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{I.A.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}x^{n+1}(1-x)}{1-x}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x}$$

□

1.14 Beispiel ()

(a)

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^7} = \sum_{k=1}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^k \overset{\nabla}{=} \sum_{k=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8}{1-\frac{1}{3}} - 1$$
$$= \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^8}\right) - 1 \approx 0,4997\ldots \left(\xrightarrow{n\to\infty} 0,5\right)$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{10+1}}{1-2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = \frac{-2047}{-1} = 2047$

1.15 Bemerkung (zu 1.14)

(a) Für $n \in \mathbb{N}^+$ und $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

(b) $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Beweis

(a)

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \overset{1.9,(b)}{=} \frac{1}{n^k}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ Terme}}$$
$$= \frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \leq \frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot\ldots\cdot 2}_{(k-1)\text{-mal}}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

(b) Nach 1.6,(b) ist $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Weiter gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{\text{BLS}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{rausziehen}}{\overset{k=0}{=}} 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$\overset{\text{(a)}}{\leq} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\underset{endl.geom.R.}{\overset{1.13}{=}} 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \underbrace{2 \cdot \underbrace{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}_{\leq 1}}_{\leq 2} \leq 3$$

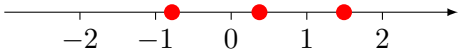
□

1.16 Abbildungen: Definitionen und Beispiele

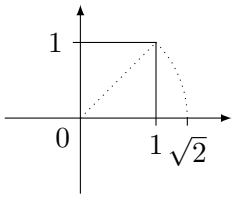
Siehe Lineare Algebra und analytische Geometrie I bzw. Anhang A 1.2.

§ 2 Axiomatische Definition der rellen Zahlen

Was sind reele Zahlen?
Anschaulich: Reelle Zahlen sind Elemente (Punkte) des Zahlenstrahls.



Lässt sich jeder Punkt des Zahlenstrahls in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ darstellen?



$\sqrt{2}$ ist KEINE rationale Zahl (siehe Zentralübung).

Weitere Vorstellung der reellen Zahlen: Reelle Zahlen sind Dezimalzahlen, z. B.:

$$
\begin{aligned}
37,500\ldots &\hat{=} 37,5\\
1,8999\ldots &\hat{=} 1,8\overline{9}\\
3,15159\ldots &\hat{=} \pi\\
1,414\ldots &\hat{=} \sqrt{2}\\
1,899\ldots &\hat{=} 1+\frac{8}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\ldots
\end{aligned}
$$

Was ist (welchen Wert hat) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$?

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} &\approx 1,833\\
1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{7} &\approx 2,592\\
1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100} &\approx 5,187\\
1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{200} &\approx 5,878
\end{aligned}
$$

2.1 Einführung

In der höheren Mathematik werden die reellen Zahlen durch ein „**Axiomensystem**“ beschrieben, aus dem sich alle (geünschten) Eigenschaften ableiten lassen. Der Vorschlag zu diesem Vorgehen stammt von David Hilbert.

2.2 Kurzfassung des Axiomensystems für die reellen Zahlen

Die rellen Zahlen bilden einen **angeordneten, vollständigen Körper**, der mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird. Genauer:
$\mathbb{R}$ ist eine nichtleere Menge mit zwei (inneren) Verknüpfungen (Abbildungen)
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \longmapsto a + b$ (Addition)

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (a,b) \longmapsto a \cdot b$ (Multiplikation)

Statt $a \cdot b$ schreibt man auch kurz ab.

Die Eigenschaften der Menge $\mathbb{R}$ und ihrer Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ werden durch 13 Axiome festgelegt:

(A1) bis (A9): **Körperaxiome**
(A10) bis (A12): **Anordnungsaxiome**
(A13): **Vollständigkeitsaxiom**

2.3 Körperaxiome

Das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper, d. h. es gelten folgende 9 Axiome:

(A1) **Assoziativgesetz der Addition**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

(A2) In $\mathbb{R}$ gibt es ein **neutrales Element der Addition**, bezeichnet mit 0, mit der Eigenschaft

$$a + 0 = a \quad \forall\ a \in \mathbb{R}$$

(A3) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert ein **negatives Element** in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit $-a$, mit der Eigenschaft

$$a + (-a) = 0$$

(A4) **Kommutativgesetz der Addition**

$$a + b = b + a$$

(A5) **Assoziativgesetz der Multiplikation**

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(A6) In $\mathbb{R}$ gibt es ein **neutrales Element der Multiplikation** $\neq 0$, bezeichnet mit 1, mit der Eigenschaft

$$a \cdot 1 = a \quad \forall\ a \in \mathbb{R}$$

(A7) Zu jedem $a \in \mathbb{R}\ ,\ a \neq 0$ existiert ein **(multiplikatives) inverses Element** in $\mathbb{R}$, bezeichnet mit a^{-1}, mit der Eigenschaft

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

(A8) **Kommutativgesetz der Multiplikation**

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(A9) **Distributivgesetz**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

2.4 Bezeichnung

Statt $a + (-b)$ schreibt man auch $a - b$, statt a^{-1} auch $\frac{1}{a}$ und statt $a \cdot b^{-1}$ auch $\frac{a}{b}$.

2.5 Bemerkung ()

(a) Das neutrale Element der Addition aus (A2), also die 0, ist eindeutig bestimmt.

(b) Das negative Element $-a$ aus (A3) ist eindeutig bestimmt.

(c) Das neutrale Element der Multiplikation aus (A6), also die 1, sowie das inverse Element a^{-1} aus (A7) sind eindeutig bestimmt.

Beweis

(a) Sei $0' \in \mathbb{R}$ mit $a + 0' = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow\ 0 + 0' = 0 \ \Longrightarrow\ 0 = 0 + 0' \overset{(A4)}{=} 0' + 0 \overset{(A2)}{=} 0'$$

(b) Sei $a' \in \mathbb{R}$ mit $a + a' = 0$

$$\Longrightarrow\ (-a)+)a + a') = (-a) + 0 \overset{(A2)}{=} -a$$

$$\overset{(A1)}{\Longrightarrow}\ (-a + a) + a' = -a \overset{(A4)}{\Longrightarrow} (\underbrace{a + (-a)}_{=0}) + a' = -a$$

$$\overset{(A3)}{\Longrightarrow}\ 0 + a' = -a \overset{(A4)}{\Longrightarrow}\ a' + 0 = a' \overset{(A2)}{\Longrightarrow}\ a' = -a$$

(c) analog zu (a) und (b)

□

2.6 Bemerkung ()

Aus den Axiomen (A1) bis (A9) erhält man folgende Aussagen:

(a) $-0 = 0$

(b) $a + x = b$ ist eindeutig lösbar, nämlich $x = b - a$

(c) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ gilt: $-(-a) = a$

(d) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $-(a + b) = -a - b$

(e) Ist $a \neq 0$, so ist $ax = b$ eindeutig lösbar, nämlich $x = a^{-1} \cdot b$

(f) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot 0 = 0$

(g) $(a + b) \cdot c) = ac + bc$

(h) $(-a)(-b) = ab$

(i) Ist $a \neq 0$, so ist $(a^{-1})^{-1} = a$

(j) Sind $a \neq 0$, $b \neq 0$, so ist $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

(k) $a \cdot b = 0 \iff (a = 0 \text{ oder } b = 0)$

(l) $a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \iff a \cdot d = b \cdot c$

Beweis (auszugsweise)

(a) $0 \overset{(A3)}{=} 0 + (-0) \overset{(A4)}{=} (-0) + 0 \overset{(A2)}{=} -0$

(c) Nach (A3) gilt für das negative Element zu $(-a)$

$$(*) \quad (-a) + (-(-a)) = 0$$

weiter gilt

$$(**) \quad (-a) + a \overset{(A4)}{=} a + (-a) \overset{(A3)}{=} 0$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt mit 2.5,(b) (Eindeutigkeit des negativen Elements)

$$-(-a) = a$$

□

2.7 Notiz

Es seien $n, m \in \mathbb{N}^*$.

(a) Für $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_i$$

(Mehrfaches Anwenden von (A9) und 2.6,(g)).

(b) Für $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m} + a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2m} + \ldots + a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nm}$$
$$\overset{(A4)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

(a) und (b) gelten i. A. nur für **endliche** Reihen / Summen!

2.8 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet (Schreibweise $a > 0$ oder $a \in \mathbb{R}_{>0} = \mathbb{R}_+$), sodass folgende Axiome erfüllt sind:

(A10) (Trichotomie) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt **genau eine** der 3 Beziehungen

$$a > 0 \quad , \quad a = 0 \quad , \quad -a > 0$$

(A11) Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a + b > 0$

(A12) Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a \cdot b > 0$

2.9 Definition und Notiz

(a) a, b seien reelle Zahlen.

$$\begin{aligned} a > b &:\Longleftrightarrow (a - b) > 0 \\ a < b &:\Longleftrightarrow b > a \quad \Big(\Longleftrightarrow (b - a) > 0 \Big) \\ a \geq b &:\Longleftrightarrow (a > b \text{ oder } a = b) \\ a \leq b &:\Longleftrightarrow (a < b \text{ oder } a = b) \end{aligned}$$

(b) Für je zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der drei Beziehungen

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

2.10 Bemerkung ()

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $a < b$ und $b < c \implies a < c$ (Transitivität)

(b) $a < b \implies a + b < b + c$

(c) $a < b \implies -a < -b$ (insbesondere $a < 0 \implies -a > 0$)

(d) $a < b$ und $c > 0 \implies ac < bc$

(e) $a < b$ und $c < 0 \implies ac > bc$

(f) $a \neq 0 \implies a^2 > 0$ (insebsondere ist $1 > 0$ und $-1 < 0$)

(g) $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$

(h) $a < 0 \implies \frac{1}{a} < 0$

(i) $0 < a < b \implies \frac{a}{b} < 1 \ , \ \frac{b}{a} > 1 \ , \ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(j) $a < b$ und $c < d \implies a + c < b + d$

(k) $0 < a < b$ und $0 < c < d \implies ac < bd$

(l) $a < b$ und $0 < c < 1 \implies a < ca + (1 - c)b < b$

Beweis

siehe [Fo1].

□

2.11 Bemerkung ()

Die Gleichung $(*)$ $a^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ NICHT lösbar. **Beweis**

(i) Sei $a = 0 \implies a^2 = 0^2 = 0 \neq 1$ d. h. $a = 0$ ist KEINE Lösung von $(*)$.

(ii) Sei $a \neq 0 \implies a^2 \overset{2.10,(f)}{>} 0 \overset{2.10,(f)}{>} -1 \overset{2.10,(a)}{\implies} a^2 > -1 \overset{2.9,(b)}{\implies} a^2 \neq -1$

□

2.12 Definition (Maximum, Minimum, Betrag reeller Zahlen)

(a) $a, b \in \mathbb{R}$

$$\max\{a,b\} = \max(a,b) := \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textbf{Maximum}$$

$$\min\{a,b\} = \min(a,b) := \begin{cases} a & \text{, falls } a \leq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textbf{Minimum}$$

(b) $a \in \mathbb{R}$

$$|a| := \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq 0 \\ -a & \text{, falls } a < 0 \end{cases} \qquad \text{(Absolut-) } \textbf{Betrag} \text{ von } a$$

2.13 Notiz

(a) $|a| = \max(a, -a)$

(b) $|a| \geq a$

2.14 Bemerkung ()

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $|a| \geq 0$

(b) $|a| = 0 \iff a = 0$

(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(d) $|-a| = |a|$

(e) Für $b \neq 0$ ist $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

(f) $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$
$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$

Beweis

(a) $\max(a, -a) \geq 0$

(b),(⇒) $|a| = 0 \implies \max(a, -a) = 0 \implies a = 0$

(⇐) $a = 0 \implies |a| = \max(0, 0) = 0$

Rest siehe [Fo1] bzw. Übungsaufgaben.

□

2.15 Satz (Dreiecksungleichung)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Beweis

Nach 2.13 ist $|a| = \max(a, -a) \implies a \leq |a|\ ,\ -a \leq |a| \quad$ und $\quad b \leq |b|\ ,\ -b \leq |b|$
Mit 2.9 und 2.10 erhalten wir

$$a + b \leq |a| + |b|$$

und

$$-(a+b) = -a - b \leq |a| + |b|$$

Daraus folgt

$$|a+b| \overset{2.13}{=} \max\left(a+b, -(a+b)\right) \leq |a| + |b|$$

□

2.16 Folgerung aus der Dreiecksungleichung

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $|a+b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$

(b) $|a-b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$

Beweis

Zentralübung

□

2.17 Definition ()

A sei eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

(a) $A \leq c$ (c heißt **obere Schranke** von A) $:\Longleftrightarrow \forall\ a \in A$ ist $a \leq c$

(b) $c \leq A$ (c heißt **untere Schranke** von A) $:\Longleftrightarrow \forall\ a \in A$ ist $c \leq a$

(c) Ist $d \in A$ und $A \leq d$, so heißt d **maximales Element** von A. (Bezeichnung: $d = \max(A)$)

(d) Ist $d \in A$ und $d \leq A$, so heißt d **minimales Element** von A. (Bezeichnung: $d = \min(A)$)

(e) Ist d die kleinste obere Schranke von A, d. h.

(i) $A \leq d\ ,\ d \in \mathbb{R} \quad$ und

(ii) aus $A \leq c\ ,\ c \in \mathbb{R}$ folgt $d \leq c$

so heißt d **Supremum** von A. (Bezeichnung: $d = \sup(A)$)

(f) Ist d die größte obere Schranke von A, d. h.

(i) $d \leq A\ ,\ d \in \mathbb{R}$ und

(ii) aus $c \leq A\ ,\ c \in \mathbb{R}$ folgt $c \leq d$

so heißt d **Infimum** von A. (Bezeichnung: $d = \inf(A)$)

2.18 Beispiel ()

Es seien $a, b \in \mathbb{R}\ ,\ a < b$.

$$[a,b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x \leq b \right\}$$
$$]a,b[:= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\}$$
$$]a,b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x \leq b \right\}$$
$$[a,b[:= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leq x < b \right\}$$
$$A := \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Menge	sup	max	inf	min
$[a,b]$	b	b	a	a
$]a,b[$	b	-/-	a	-/-
$]a,b]$	b	b	a	-/-
$[a,b[$	b	-/-	a	a
A	1	1	0	-/-

2.19 Bemerkung ()

Maximales und minimales Element, Supremum und Infimum sind eindeutig bestimmt (falls sie existieren).

2.20 Vollständigkeitsaxiom

(A13) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge vn $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (in $\mathbb{R}$).

2.21 Bemerkung ()

Aus (A13) folgt: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infumum (in $\mathbb{R}$).

2.22 Notiz

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper, in dem analog zu $\mathbb{R}$ die Anordnungsaxiome (A10), (A11) und (A12) gelten. $\mathbb{Q}$ ist aber NICHT vollständig, d. h. (A13) gilt NICHT in $\mathbb{Q}$, denn

$$A := \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2 \right\} \subset \mathbb{Q}$$

ist nach oben beschränkt, aber $\sup(A)$ existiert in $\mathbb{Q}$ NICHT (da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

2.23 Die natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$

2.23.1 Definition ()

Eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ heißt **induktive Menge** (oder Nachfolgermenge)

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(a)} & 0 \in M \\ \text{(b)} & a \in M \implies a+1 \in M \end{cases}$$

2.23.2 Beispiel ()

$\mathbb{R}$ und $[-5, \infty) := \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; -5 \leq a \right\}$ sind induktive Mengen.

2.23.3 Definition ()

Die kleineste induktiove Teilmenge von $\mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

$$\left(\text{in Symbolen: } \mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \text{ ist} \\ \text{induktiv}}} M \right)$$

2.23.4 Bemerkung ()

Die Menge $\mathbb{N}$ ist NICHT nach oben beschränkt (formaler Beweis, folgt aus (A13)).

2.24 Satz (Prinzip von Archimedes)

Zu jedem $a > 0$, $b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$na > b$$

(Man sagt, $\mathbb{R}$ ist ein **archimedisch angeordneter Körper**).

Beweis (indirekter Beweis)

Angenommen $na \leq b \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $n \leq \frac{b}{a} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, d. h. $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt $\quad \lightning$ zu 2.23.4.

□

2.25 Folgerungen aus dem Prinzip von Archimedes

(a) Zu jedem $a > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{n} < a$$

(b) Sei $d > 1$. Dann gibt es zu jedem $c > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d^n > c$$

Beweis

(a) Nach 2.24 existiert zu a ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > 1$ ($\hat{=}$ (b) in 2.24)
$\overset{n \geq 1}{\Longrightarrow} a > \frac{1}{n}$

(b) Sei $a := d - 1$. Nach Voraussetzung ist $a > 0$. Dann gilt:

$$d^n = (1+a)^n \overset{\text{Bern.}}{\underset{\text{Ungl.}}{\geq}} 1 + na \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

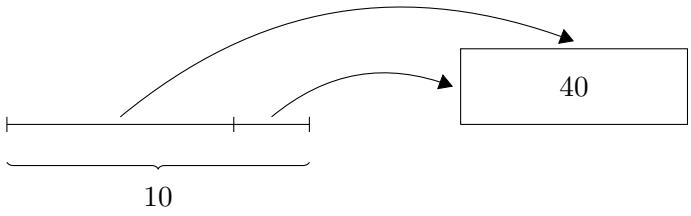
Nach 2.24 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > c$. Für dieses n gilt dann:

$$d^n \geq 1 + na > 1 + c > c$$

□

§ 3 Komplexe Zahlen

Gerolamo Cardano stellte folgende Aufgabe:
„Eine Strecke der Länge 10 soll in zwei Stücke zerlegt werden, dass das daraus gebildete Rechteck eine Fläche von 40 hat.!“



Die dazugehörige Gleichung lautet:

$$x(19-x) = 40 \quad (0 < x < 10)$$
$$\iff x^2 - 10x + 40 = 0 \iff x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-160}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{4\cdot(-15)}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Das Ergebnis gibt in $\mathbb{R}$ KEINEN Sinn, „formales Rechnen“ liefert aber:

$$x_1 + x_2 = 5 + \sqrt{-15} + 5 - \sqrt{-15} = 10$$
$$x_1 \cdot x_2 = \left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right) = 5^2 - \left(\sqrt{-15}\right)^2 = 25 - (-15) = 40$$

Die „komplexen“ (zusammengesetzten Ausdrücke) $\alpha + \sqrt{-\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind seit dem ni mehr aus der Mathematik verschwunden. Für $\sqrt{-1}$ wurde das Symbol i eingeführt.

Entdeckungen wie die Formel

$$e^{\pi - \mathrm{i}} + 1 = 0$$

erhöhten den Reiz dieser neuen Zahlen.
Die mathematisch korrekte Definition der komplexen Zahlen geht auf C. F. Gauß und W. R. Hamilton zurück.

Für die Menge der komplexen Zahlen (bezeichnet mit $\mathbb{C}$) sind zwei Darstellungsformen üblich:

(I) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}$

(II) $\mathbb{C} = \left\{ x + \mathrm{i}y \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$ (i heißt imaginäre Einheit).

3.1 Notiz

Wir benutzen in den meisten Fällen die Darstellung $x + \mathrm{i}y$. Mit dieser Darstellung kann man im wesentlichen wie mit reellen Zahlen rechnen, wobei $\mathrm{i}^2 = -1$ zu beachten ist.

3.2 Rechengesetze in $\mathbb{C}$

Sei $z = x + \mathrm{i}y$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ mit $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

(a) $z_1 = z_2 \iff (x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2)$

(b) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$ (Addition/Subtraktion)

(c) $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$ (Multiplikation)

(d) $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i} \cdot \dfrac{y}{x^2+y^2}$ (inverses Element)

(e) $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2y_2^2} + \mathrm{i} \cdot \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ (Division)

3.3 Bemerkung ()

(a) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen + aus 3.2,(b) und $\cdot$ aus 3.2,(c) bildet einen Körper. Das neutrale Element der Addition ist $0 + \mathrm{i} \cdot 0$, das neutrale Element der Multiplikation ist $1 + \mathrm{i} \cdot 0$.

(b) $\mathbb{R}$ kann als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden und zwar

$$\mathbb{R} = \left\{ x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \;\middle|\; y = 0 \right\}$$

(c) Die Elemente von $\mathbb{C}$ können NICHT wie die Elemente aus $\mathbb{R}$ angeordnet werden.

3.4 Definition ()

Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ heißt

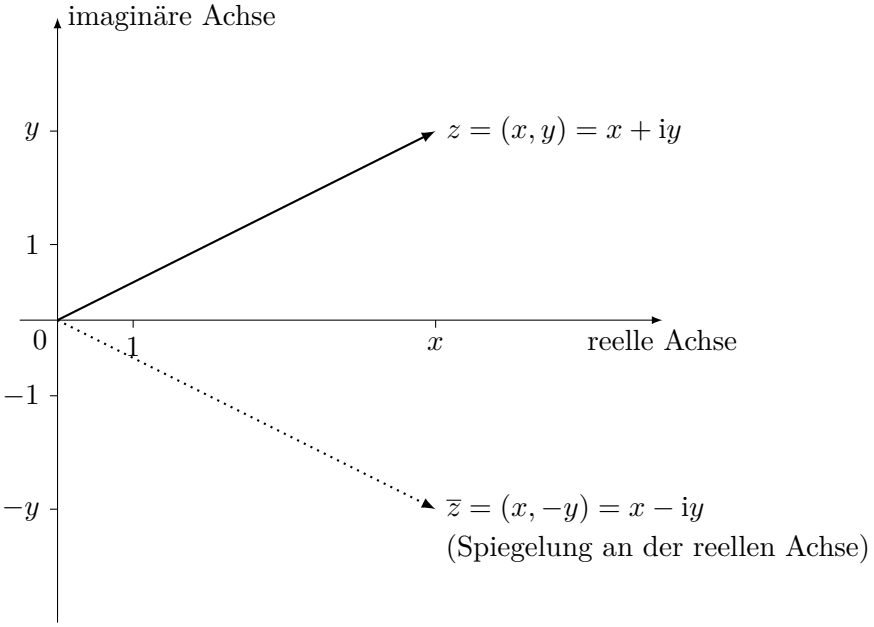
(a) $\mathrm{Re}(z) := x$ Realteil von z

(b) $\mathrm{Im}(z) := y$ Imaginärteil von z

(c) $\overline{z} := x - \mathrm{i}y$ konjugiert komplexe Zahl zu z.

3.5 Geometrische Interpretation von $\overline{z}$

Betrachte die Gaußsche Zahlenebene (GZE) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:



3.6 Bemerkung ()

Es seien $z = x + \mathrm{i}y$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ komplexe Zahlen. Dann gilt:

(a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$

(b) $\overline{\overline{z}} = z$

(c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(e) $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$, d. h. $\mathrm{Im}(z) = 0$

Beweis

(a)

$$\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = \mathrm{Re}(z)$$
$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(x + \mathrm{i}y - (x - \mathrm{i}y)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(2\mathrm{i}y) = y = \mathrm{Im}(z)$$

(b) bis (e) Übungsaufgaben!

□

3.7 Definition ()

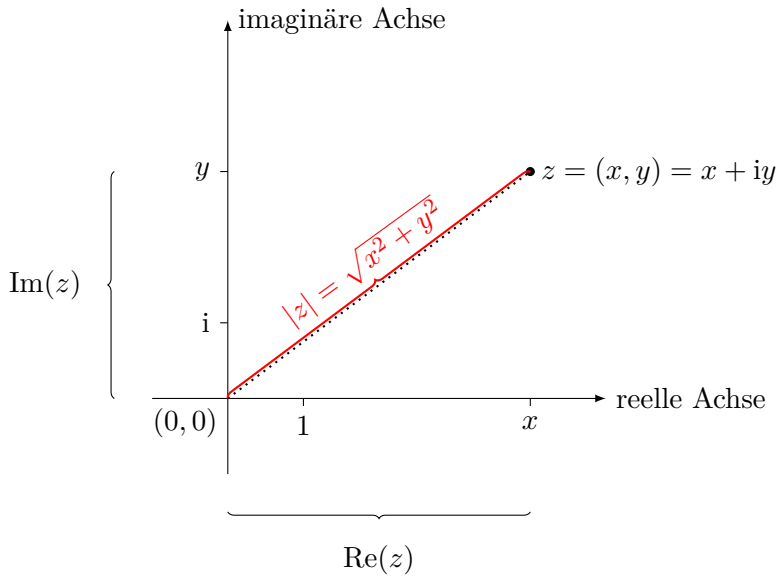
Es sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

der **Betrag** von z.

3.8 Der Betrag einer komplexen Zahl (Graphische Erläuterung)

Betrachte die Gaußsche Zahlenebene (GZE) $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:



Der Betrag soll der Abstand des Punktes z vom Nullpunkt sein.

3.9 Bemerkung ()

Vor: $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$

Beh:

(a) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ und $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

(b) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(\overline{z})$

(c) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$

(d) $|\mathrm{i}| = 1$

Beweis

(a)

$$z \cdot \overline{z} = \overbrace{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)}^{x^2 - (\mathrm{i}y)^2} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

$$|z| \overset{\text{Def.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

(b)

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + \mathrm{i}y) = x = \mathrm{Re}(x - \mathrm{i}y) = \mathrm{Re}(\overline{z})$$
$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x + \mathrm{i}y) = y = -(-y) = -\mathrm{Im}(x - \mathrm{i}y) = -\mathrm{Im}(\overline{z})$$

(c)

$$\mathrm{Re}(z) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$
$$\mathrm{Im}(z) = y \leq |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

(d) $|\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

□

3.10 Satz ()

Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

(a) $|z| \geq 0$

(b) $|z| = 0 \iff z = 0$

(c) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(d) $|\overline{z}| = |z|$

(e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis

(a) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

(b) $|z| = 0 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \underset{y=0}{\iff} x = 0 \;\; z = 0$

(c) $|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2}} = \sqrt{\underbrace{z_1 \overline{z_1}}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{z_2 \overline{z_2}}_{\in\mathbb{R}}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} \cdot \sqrt{z_2 \overline{z_2}} = |z_1| \cdot |z_2|$

(d) $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

(e)

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = \underbrace{z_1 \overline{z_1}}_{|z_1|^2} + \underbrace{\underbrace{z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}}_{z_1 \overline{z_2} \overline{z_1 \overline{z_2}}}}_{2\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})} + \underbrace{z_2 \overline{z_2}}_{|z_2|^2}$$

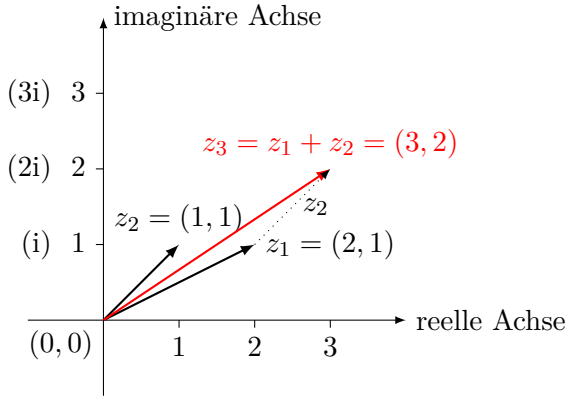
$$=\leq |z_1|^2 + 2 \underbrace{\underbrace{|z_1 \overline{z_2}|}_{|z-1| \cdot |\overline{z_2}|}}_{|z_1| \cdot |z_2|} + |z_2|^2 = \big(|z_1| + |z_2|\big)^2$$

□

3.11 Geometrische Interpretation der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen in der GZE

Sei $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_2 = 1 + \mathrm{i}$.

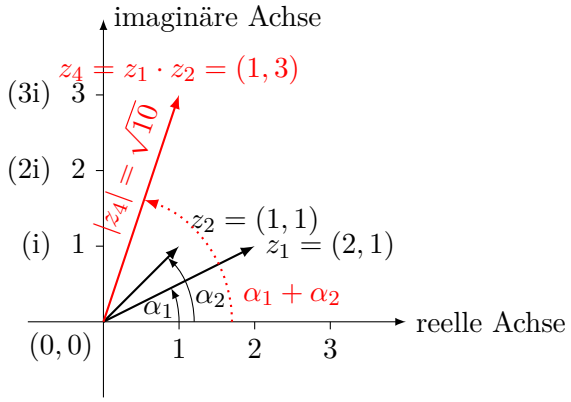
(a) **Addition**



$$z_3 = z_1 + z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$$

Die Addition zweier komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition der GZE.

(b) **Multiplikation**



$$z_4 = z_1 \cdot z_2 = (2 + \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 3\mathrm{i}$$
$$|z_4| = |z_1||z_2| = \sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{10}$$

Genuere Erklärung folgt später durch Polarkoordinaten.

3.12 Worin bestehen die wesentlichen Unterschiede zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$?

(1) Nachteile von $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ ist NICHT anordnbar wie $\mathbb{R}$.

Denn: Angenommen in $\mathbb{C}$ gelten die Axiome (A10), [(A11)] und (A12). Dann folgt

$$1 > 0 \quad , \quad -1 = \mathrm{i}^2 > 0$$

↯ zu (A10), denn 1 und -1 können NICHT beide > 0 sein.

(2) Vorteile von $\mathbb{C}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und jedes Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle, z. B. gilt für $p(x) = x^2 + 1$:

$$p(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 + 1 = 0$$

aber $p(a) \neq 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

3.13 Beispiel (Rechnen in $\mathbb{C}$)

(1) $\mathrm{i}^{2012} = (\mathrm{i}^4)^{503} = 1^{503} = 1$
$\mathrm{i}^{2023} = \mathrm{i}^{2020} \cdot \mathrm{i}^3 = (\mathrm{i}^4)^{505} \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot \mathrm{i}^3 = 1 \cdot (-1) \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$

(2) Es seien $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + \mathrm{i}$. Dann gilt:

(a) $z_1 + z_2 = (3 + 2\mathrm{i}) + (-1 + \mathrm{i}) = 2 + 3\mathrm{i}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2\mathrm{i}) \cdot (-1 + \mathrm{i}) = \big(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1\big) + \mathrm{i}\big(3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2\big) = -5 + \mathrm{i}$
oder ausmultiplizieren

(c) $z_2^{-1} = \dfrac{-1}{(-1)^2} + 1^2 - \mathrm{i} \cdot \dfrac{1}{(-1)^2 + 1^2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}$

(d) $|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

(e) $\mathrm{Re}(z_1) = 3 \quad , \quad \mathrm{Im}(z_2) = 1 \quad , \quad \overline{z_1} = 3 - 2\mathrm{i}$

Grenzwerte und Stetigkeit

Eine exakte Formulierung des Grenzwertbegriffs gehört mit zu den wichtigsten Errungenschaften der modernen Mathematik.

Begriffe wie „Grenzwert“, „Annäherung“ oder „beliebig nah bei 0“ erhalten eine präzise Bedeutung.

§ 4 bildet das Fundament der Analysis.

§ 4 Folgen, Grenzwerte

4.1 Fragen

(a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Welche Bedeutung hat diese „unendliche“ Summe?

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n} = \frac{11}{6} \approx 1,833$$
$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n} = \frac{7381}{2520} \approx 2,928$$
$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} \approx 5,187$$

Gibt es eine obere Schranke? Obere Schranke von was?

(b) $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$

Gibt es eine obere Schranke?

Gibt es eine reelle Zahl, die dieser „unendlichen“ Summe entspricht?

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$$
$$\sum_{n=0}^{9} \frac{1}{n!} = \ldots = \frac{98641}{36288} \approx 2,718281526$$
$$\sum_{n=0}^{99} \frac{1}{n!} \approx 2,718281828$$

(c) Sei $a_n = \frac{n! + 2}{(n+1)! + 1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Gegen welchen Wert „strebt“ a_n, wenn „n gegen unendlich geht“?

$a_{10} \approx 0,0909 \quad , \quad a_{100} \approx 0,0099 \quad , \quad \ldots$

Wie kann man zeigen, dass a_n „gegen 0 geht für n gegen unendlich“?

(d) Die Funktionen $g_1, g_2, g_3 \colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$g_1(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad , \quad g_2(x) = \frac{\sin(x)}{2x} \quad , \quad g_3(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

g_1, g_2, g_3 sind für $x = 0$ NICHT definiert.

Gegen welchen Wert „streben“ $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$, wenn „x gegen 0 geht“?

Vermutung

$g_1(x)$ geht gegen	1	für x gegen 0.
$g_2(x)$ geht gegen	$\frac{1}{2}$	für x gegen 0.
$g_3(x)$ geht gegen	„∞“	für x gegen 0.

Die zunächst wagen Aussagen „geht gegen“ etc. sollen präzisiert werden.

4.2 Definition ()

Unter einer Folge reeller Zahlen versteht man eine Abbildung

$$a \colon \left\{ n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; n \geq k \right\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \text{ wobei } k \in \mathbb{Z}$$

4.3 Schreibweisen für Folgen

$k = 0$	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	,	$(a_n)_{n\geq 0}$	, $(a_0, a_1, a_2 \ldots)$
$k = 1$	$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$	,	$(a_n)_{n\geq 1}$	, $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$
$k = -2$			$(a_n)_{n\geq -2}$	, $(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2 \ldots)$

4.4 Beispiel (Folgen)

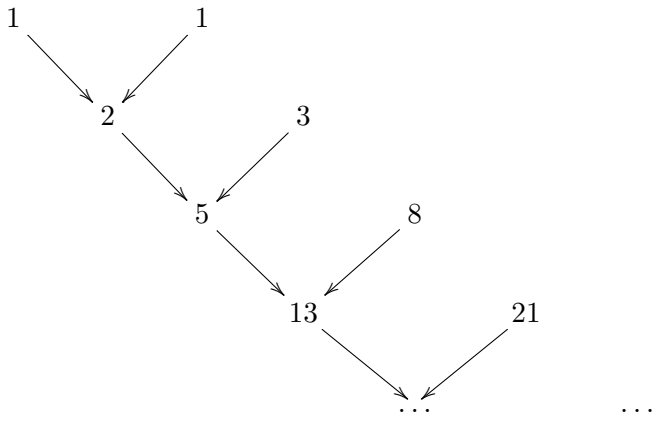
(a) $a_n = a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow$ konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad (a, a, a \ldots)$

(b) $a_n = \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
$\rightsquigarrow$ Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ $\qquad \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right)$

(c) (siehe 4.1,(a))
$s_1 = 1$, $s_2 = s_1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = s_2 + \frac{1}{3}$, $\ldots$, $s_n = s_{n-1} + \frac{1}{n}$
$\rightsquigarrow$ Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq 1}$ $\qquad \left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6} \ldots\right)$

(d) $a_n = (-1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow$ Folge $\underbrace{((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}}_{((-1)^n)_{n\geq 0}}$ $\qquad (1, -1, 1, -1 \ldots)$

(e) (Rekursive Definition einer Folge)
$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$
$\rightsquigarrow$ Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots)$
Folge der „Fibonacci-Zahlen“



(f) $a_n = b^n \ , \ b \in \mathbb{R} \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow$ Folgr $(b^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (1, b, b^2, b^3 \ldots)$

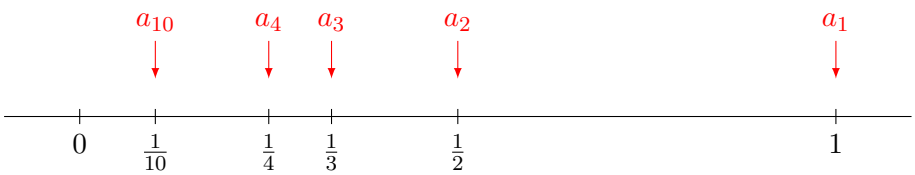
(g) $a_n = (-b)^n \ , \ b \in \mathbb{R} \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow$ Folge $\left((-b)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (1, -b, b^2, -b^3 \ldots)$

(h) $a_n = -b^n \ , \ b \in \mathbb{R} \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$
$\rightsquigarrow$ Folge $(-b^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad (-1, -b, -b^2, -b^3 \ldots)$

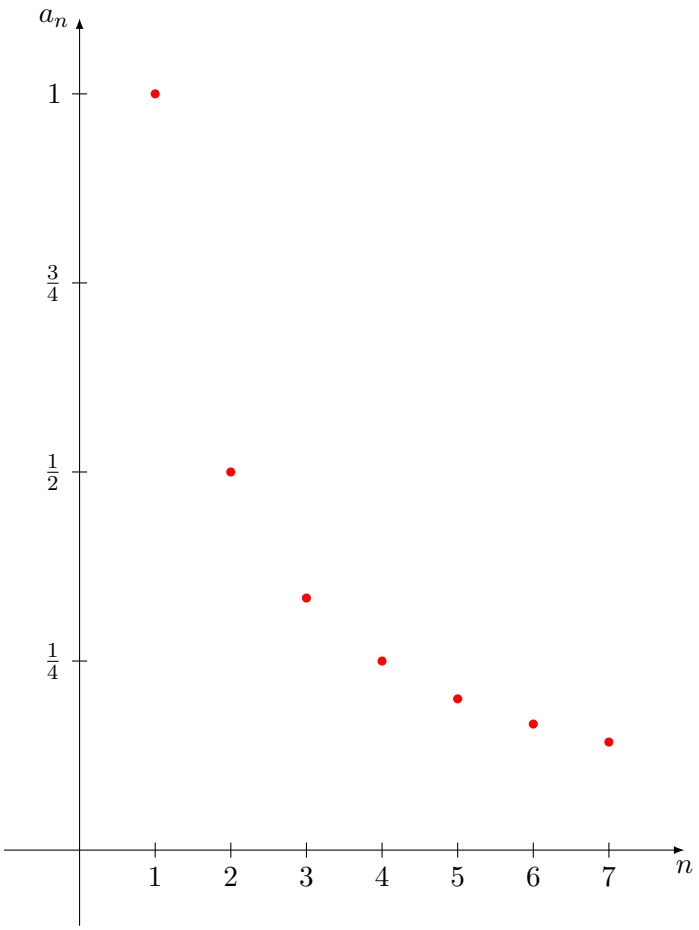
4.5 Graphische Darstellung von Folgen

$\left(\text{an Hand der Folge } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}\right)$

Eindimensional $\left(\text{Werte der Abbilung } \ a\colon \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ n \longmapsto \frac{1}{n}\right)$



Zweidimensional $\left(\text{Graph der Abbilung } \ a\colon \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ n \longmapsto \frac{1}{n}\right)$



Nun kommt die wichtigste Definition:

4.6 Definition ()

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge reeller Zahlen. !

(a) Die Folge heißt **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$ (oder konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0\ (\varepsilon \in \mathbb{R})\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$$

In zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0a$ oder $a_n \longrightarrow a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

(b) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, so heißt a **Grenzwert der Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$|a_n - a|$ ist der Abstand zwischen a_n und a.

4.7 Notiz

(a) Ist $(a_n)_{n\geq k}$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Folge reeller Zahlen, so bedeutet $\lim\limits_{n\to\infty} = a$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ ,\ N \geq k\colon\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$$

(b) Schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so bedeutet dies, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass a_n für alle $n \geq k$ definiert ist.

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-2} = 0$ mit $\frac{1}{n-2}$ ist definiert für alle $n \geq 3$

4.8 Definition ()

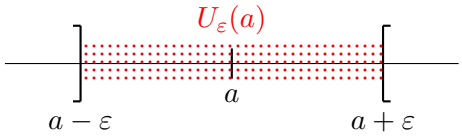
Ist $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$, so heißt

$$U_\varepsilon(a) :=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x-a| < \varepsilon \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a-\varepsilon < x < a+\varepsilon \right\}$$

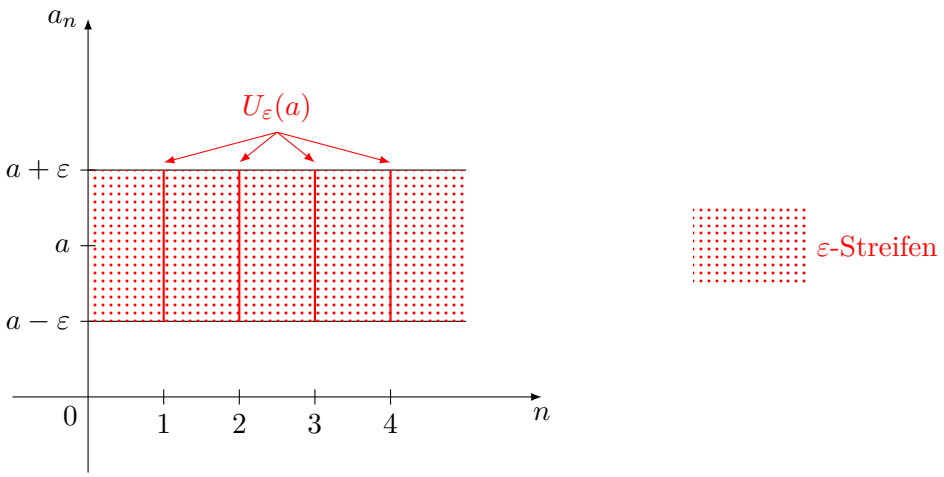
ε-Umgebung von a.

Skizzen

eindimensional



zweidimensional



4.9 Bemerkung ()

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff$ In jeder ε-Umgebung ($\varepsilon > 0$) von a liegen „fast alle“ Glieder der Folge (a_n).
(„Fast alle“ bedeutet hier: Alle bis auf endlich viele.)

4.10 Definition ()

(a_n) sei eine Folge reeller Zahlen.

(a) (a_n) heißt **Nullfolge** $:\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(b) (a_n) heißt **divergent** $:\iff$ (a_n) konvergiert gegen KEINE reelle Zahl.

4.11 Bemerkung ()

(a) Vor: (a_n) sei eine Folge reeller Zahlen.
Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$

(b) Vor: $(a_n), (b_n)$ sein Folgen reeller Zahlen und $\lambda \in]0, \infty[$. (a_n) sei eine Nullfolge und $|b_n| \leq \lambda |a_n| \quad \forall\, n \geq k\ ,\ k \in \mathbb{N}$.
Beh: (b_n) ist eine Nullfolge.

Beweis

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = a &\overset{4.6}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \\ &\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ |(a_n - a) - 0| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \\ &\overset{4.6}{\iff} \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0\end{aligned}$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben.

(a_n) Nullfolge $\underset{4.10}{\overset{4.6}{\Longrightarrow}}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - 0| = |a_n| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{=:\varepsilon} \quad \forall\, n \geq N$

$$\implies |b_n - 0| = |b_n| \overset{\text{für } n>k}{\underset{\text{Vor.}}{\leq}} \lambda \cdot |a_n| \overset{\text{für } n\geq \max(k,N)}{<} \underbrace{\lambda \cdot \frac{\varepsilon}{2}}_{=\varepsilon} \quad \forall\, n \geq \max(k, N)$$

$\underset{4.10}{\overset{4.6}{\Longrightarrow}}$ (b_n) ist eine Nullfolge.

□

4.12 Beispiel ()

(a) Beh: $a_n = a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben. Dann gilt:

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \quad \forall\, n \geq 0 = N$$

$\overset{4.6}{\Longrightarrow}$ Beh.

□

(b) Beh: $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt $\forall\ n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Mit 4.6 folgt Beh.

□

(c) Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

Beweis

Zentralübung.

□

(d) (Teil einer Staatsexamensaufgabe)
Die Folge (a_N) sie definiert durch

$$a_0 = 0\ ,\ a_1 = 1\ ,\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 2$$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$

Beweis

(i) Mit Hilfe der vollständigen Induktion zeigt man

$$(*) \quad a_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(Übungsaufgabe)

(ii) Es gilt:

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| \overset{(*)}{=} \left|\frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right| = \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{Nullfolge nach Übungsaufgabe}}$$

$\overset{4.11,(b)}{\underset{\lambda=\frac{2}{3}}{\Longrightarrow}}$ $\left(a_n - \frac{2}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

$\overset{4.11,(a)}{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$

□

4.13 Bemerkung ()

Beh:

(a) Für $p \in \mathbb{N}\ ,\ p \geq 2$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Beweis

(a) Übungsaufgabe

(b) Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben und sei $n \geq 2$. Definiere

$$a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \quad (\text{es gilt } a_n \geq 0)$$

Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\geq 2}$ eine Nullfolge ist. Es gilt:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+a_n)^n \overset{\text{Bin.L.S.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} a_n^k$$
$$= 1 + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} a_n^n \underset{a_n \geq 0}{\geq} 1 + \binom{n}{2} a_n^2$$

Daraus folgt

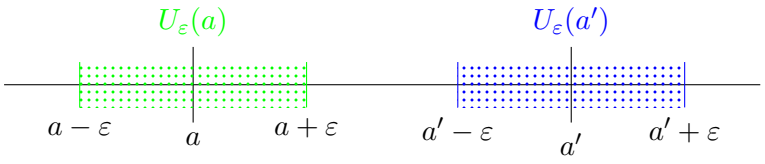
$$a_n^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-1)^2 2!(n-2)}{n!} = \frac{2}{n}$$

d. h. $a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$
Mit Teil (a) und 4.11,(b) folgt, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist.
$\overset{4.11,(a)}{\Longrightarrow}$ Beh.

□

4.14 Anschauliche Überlegung zur Eindeutigkeit des Grenzwertes

Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$ mit $a \neq a'$



Dann müssten sowohl in $U_\varepsilon(a)$ als auch in $U_\varepsilon(a')$ fast alle a_n liegen, was NICHT möglich ist. Somit muss $a = a'$ sein.

Was ist, wenn a und a' näher beieinander liegen?

4.15 Satz (Eindeutigkeit des Grenzwertes)

Konvergiert die Folge (a_n) sowohl gegen a, als auch gegen a', so ist $a = a'$.

Beweis (indirekt)

Sei $\varepsilon := \frac{|a-a'|}{2}$; $\varepsilon > 0$, da $a \neq a'$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \exists\, N_1 \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a' \implies \exists\, N_2 \in \mathbb{N}\colon\ |a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_2$$

Daraus folgt für $n := \max(N_1, N_2)$:

$$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \overset{\Delta \text{ UG}}{\leq} \underbrace{|a - a_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a'|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = |a - a'| \quad \lightning$$

□

4.16 Satz ()

Jede konvergente Folge $(a_n)_{n \geq k}$ ist beschränkt, d. h. es gibt ein $K \geq 0$ mit der Eiganschaft

$$|a_n| \leq K \quad \forall\, n \geq K$$

Beweis

Sei $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$(*) \quad |a_n - a| < 1 \quad \forall\, n \geq N$$

Damit folgt

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \overset{\Delta \text{ UG}}{\leq} |a_n - a| + |a| \overset{(*)}{<} 1 + |a| \quad \forall\, n \geq N$$

Für $K := \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \ldots, |a_{N+1}|, 1 + |a|\} \geq 0$ gilt dann:

$$|a_n| \leq k \quad \forall\, n \geq k$$

□

4.17 Notiz

Ist die Folge a_n beschränkt $\overset{\text{i. A.}}{\not\Longrightarrow}$ (a_n) ist konvergent(siehe Beispiel 4.18)

4.18 Beispiel ()

Es sei $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(ii) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Beweis

(i) $|a_n| \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(ii) Angenommen, es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.
Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(*) \quad |a_n - a| < \varepsilon = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Für $n \geq N$ gilt damit

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \overset{\Delta \text{ UG}}{\leq} \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<1_{(*)}} + \underbrace{|a - a_n|}_{<1_{(*)}} < 2 \quad \lightning$$

□

4.19 Satz (Harmonische Reihe)

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $s_1 = 1$, $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{n+1}$ ist divergent.

Beh: Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt

$$(*) \quad \frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} < n$$

Beweis

Übungsaufgabe;

Aus $(*)$ folgt:
Die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt. Mit 4.16 folgt $(s_n)_{n\geq 1}$ ist divergent.

□

4.20 Definition ()

$(a_n)_{n\geq k}$ sei eine Folge reeller Zahlen.

(a) Ist (a_n) beschränkt, so sei

$$\sup(a_n) := \sup\left\{a_n \;\middle|\; n \geq k\right\} \quad \text{und} \quad \inf(a_n) := \inf\left\{a_n \;\middle|\; n \geq k\right\}$$

(Existenz von $\sup(a_n)$ und $\inf(a_n)$ folgen aus dem Vollständigkeitsaxiom A13).

(b) (a_n) heißt **monotn wachsend** bzw. **monoton fallend**

$$:\Longleftrightarrow \; a_n \leq a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\, n \geq k$$

(c) (a_n) heißt **monotone Folge**, wenn (a_n) monoton wachsend oder fallend ist.

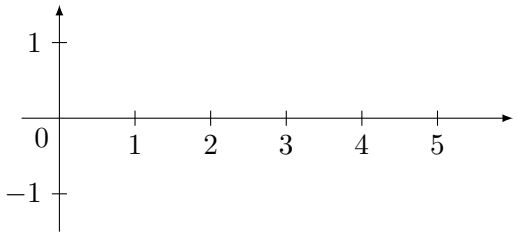
4.20.1 Beispiel

(i) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $M := \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots\right\}$, $\sup(a_n) = 1$, $\inf(a_n) = 0$, $\max(M)$ existiert NICHT , $\min(M) = 0$

(ii) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist eine monoton fallende Folge.

(iii) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ ist eine monoton steigende Folge.

(iv) $\left(-\frac{1}{n}\right)^n_{n\geq 1}$ ist weder monoton steigend noch fallend.



4.21 Satz (Konvergenz und Beschränktheit eine monotonen Folge)

Vor: (a_n) sei eine monotone Folge
Beh: (a_n) ist konvergent $\iff$ (a_n) ist beschränkt

Ergänzungen zu 4.21

(a) (a_n) nach oben beschränkt, d. h. $a_n < k \quad \forall\, n\ ,\ k \in \mathbb{R}$
und (a_n) monoton wachsend $\Longrightarrow$ (a_n) kovergent $\big(\lim(a_n) = \sup(a_n)\big)$

(b) (a_n) nach unter beschränkt, d. h. $a_n \geq k \quad \forall\, n\ ,\ k \in \mathbb{R}$
und (a_n) monoton fallend $\Longrightarrow$ (a_n) konvergent $\big(\lim(a_n) = \inf(a_n)\big)$

Beweis (Satz 4.21)

(⇒) Gilt nach Satz 4.16 immer (also auch ohne die Voraussetzung „monotone Folge“)

(⇐),(i) (a_n) sei eine monoton wachsende Folge. Da (a_n) beschränkt ist, existiert $a := \sup(a_n)$.
Wir zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben.
Es existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $a_l \overset{a=\sup(a_n)}{\geq} a_l > a - \varepsilon$.
Daraus folgt mit der Eigenschaft monoton wachsend:

$$a \geq a_n \overset{\text{monoton wachsend}}{\geq} a_l > e - \varepsilon \quad \forall\, n \geq l$$

d. h. $a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, n \geq l$. Daraus folgt mit Bemerkung 4.9 die Konvergenz von (a_n).

(⇐),(ii) analog.

□

4.22 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)

Vor: $(a_n), (b_n)$ seien konvergente Folgen reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Beh:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
d. h. $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

(b) $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

(c) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

(d) Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $b_n \neq 0 \quad \forall\, n \geq n_0$.
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergente Folge und $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Beweis

siehe [Fo1], Kapitel 4

□

4.23 Beispiel (Rechnen mit Grenzwerten)

(a) Nach 4.12,(b) ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0$
Bemerkung: lim darf man nur bei konvergenten Folgen aufteilen

(b) Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} \overset{4.22,(b)}{=} r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n^2} \overset{4.22,(b)}{=} r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

(c) $\lim a_n = a \implies \lim(-a_n) = -a$

(d) Sei $a_n = \frac{3n^2+17n}{2n^2-2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Was ist dann $\lim_{n\to\infty} a_n$?
Es gilt:

$$a_n = \frac{3 + \frac{17}{n}}{2 - \frac{2}{n^2}} \qquad , \; n \geq 1$$

Somit gilt:

$$\lim(a_n) \overset{4.22}{=} \frac{\lim(3) + \lim\left(\frac{17}{n}\right)}{\lim(2) + \lim\left(\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

(e) Sei $a_n = \frac{n^2-3n+(-1)^n}{3n^2-7n+5}$ für $n \in \mathbb{N}$
Kurzform

$$\lim a_n = \lim \frac{\overbrace{1}^{\to 1} - \overbrace{\frac{3}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{(-1)^n}{n^2}}^{\to 0}}{\underbrace{3}_{\to 3} - \underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\to 0}} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}}{3 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Langform

$$\lim a_n = \lim \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}}{3 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}} \overset{4.22}{=} \frac{\lim(1) - \lim\left(\frac{3}{n}\right) + \lim\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{\lim(3) - \lim\left(\frac{7}{n}\right) + \lim\left(\frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}$$

4.24 Bemerkung (Nullfolge)

(a) $(a_n), (b_n)$ seien Nullfolgen und $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist (c_n) eine Nullfolge.

(b) Es seien $r \in \mathbb{N}^*, (a_n)_{n \geq k}$ Folge mit $\lim a_n = a$ und $b_n := a_{n+r} \quad \forall\, n \geq k$. Dann gilt:

$$\lim b_n = a$$

(Kurzform: $\lim a_n = \lim a_{n+r}$ für festes $r \in \mathbb{N}^*$)

Beweis

(a) Folgt direkt aus den Rechenregeln 4.22.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

$$\begin{aligned} \lim a_n = a &\implies \exists\, N \in \mathbb{N}\colon |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \\ &\implies |b_n - a| = |a_{n+r} - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n \\ &\implies b_n = a \end{aligned}$$

□

Beispiel zu (b)

$(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}a_n^2$ $(n \geq 1)$. Es sei bekannt, dass der Grenzwert a existiert. Berechne a.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \overset{4.24,(b)}{=} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4}a_n^2\right) = 1 + \frac{1}{4}a^2$$
$$\implies a^2 - 4a + 4 \implies (a-2)^2 = 0 \implies a = 2$$

4.25 Satz (Sandwich-Theorem)

Vor: $(a_n)_{n\geq k}, (b_n)_{n\geq k}$ konvergente Folgen.

Beh:

(a) $a_n \leq b_n \quad \forall\, n > n_0 \in \mathbb{N} \implies a = \lim a_n \leq \lim b_n = b$

(b) folgt direkt aus (b)

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ und } \lambda \leq a_n \leq \mu \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \implies \lambda \leq \lim a_n \leq \mu$$

(c) („**Sandwich-Theorem**“ **SWT**)
$\lim b_n = \lim a_n = a$ und (c_n) Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N}$
$\implies$ (c_n) ist konvergent und $\lim c_n = a$

4.26 Notiz

▽ Aus $a_n < b_n \quad \forall\, n \geq n_0 \overset{\text{i.A.}}{\not\implies} \lim a_n < \lim b_n$

z. B. $(a_n) := \left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n) := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\implies a_n < b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \text{ aber } \lim a_n = 0 = \lim b_n$$

Allgemein gilt

$$a_n < b_n \implies a_n \leq b_n \implies \lim a_n \leq \lim b_n$$

4.27 Beispiel (Anwendung des Sandwich-Theorems)

(a) Beh: Sei $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 1 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{t} = 1$

Beweis

$$\underbrace{1}_{\xrightarrow{n\to\infty}1} \overset{(*)}{\leq} \sqrt[n]{t} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty}1} \quad \forall\, n \geq t \overset{\text{SWT}}{\implies} \lim \sqrt[n]{t} = 1$$

$(*)$ Annahme: $\sqrt[n]{t} < 1 \implies t = \left(\sqrt[n]{t}\right)^n < 1$ ↯

□

(b) Es sei $l \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots, c_l \in [0, \infty[$ und $a_n := \sqrt[n]{c_1^n + c_2^n + \ldots + c_l^n}$ für $n \geq 2$.
Beh: $\lim a_n = \max\{c_1, \ldots, c_l$

Zahlenbeispiel: $c_1 := 7$, $c_2 := 3$, $c_3 := 8$

$$a_2 = \sqrt[2]{7^2 + 3^2 + 8^2} = 11.04$$
$$a_{10} = \sqrt[10]{7^{10} + 3^{10} + 8^{10}} \approx 8.189$$
$$a_{30} = \sqrt[30]{7^{30} + 3^{30} + 8^{30}} \approx 8.004$$

Beweis (zu (b))

Sei $M := \max\{c_1, \ldots, c_l\}$

$$M = \sqrt[n]{M^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{l \cdot M^n} = \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{l}}_{\xrightarrow{(a)} 1} \cdot M}_{\to M}$$

Mit dem SWT folgt die Behauptung.

□

4.28 Definition (bestimmt divergente Folge)

Eine Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$)
$:\Longleftrightarrow \ \forall\, K > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$: $a_n > K$ (bzw. $a_n < -K$) $\quad \forall\, n \geq N$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

4.29 Beispiel (bestimmt divergente Folge)

(a) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.

(b) Die Folge $(-2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$.

(c) Die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber NICHT bestimmt divergent.

(d) Die Folge $\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber NICHT bestimmt divergent.

4.30 Notiz

$+\infty$, $-\infty$ sind KEINE reellen Zahlen. Zu $+\infty$ und $-\infty$ gibt es z. B. KEINE ε-Umgebung.

4.31 Bemerkung

(a) (a_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$
$\Longrightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall\, n \geq n_0$ und $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist Nullfolge.

(b) (a_n) Nullfolge und $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).

Beweis

ohne Beweis.

□

4.32 Beispiele

(Zum Konvergenzverhalten von $(a_n \cdot b_n) = c_n$ falls $a_n \longrightarrow +\infty$, $b_n \longrightarrow 0$)

(a) $(a_n) = (n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n) = \left(\frac{c}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mit $c \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \lim(a_n \cdot b_n) = \lim c_n = c$

(b) $(a_n) = (2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \rightsquigarrow \lim(a_n \cdot b_n) = \lim \frac{2^n}{n} = +\infty$ (bestimmt divergent)

(c) $(a_n) = (2^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \rightsquigarrow \lim(a_n \cdot b_n) = \lim -\frac{2^n}{n} = -\infty$ (bestimmt divergent)

(d) $(a_n) = (n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \rightsquigarrow a_n \cdot b_n = (-1)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (divergent, nicht bestimmt)

4.33 Bemerkung

Das Konvergenzverhalten der Folge $(b^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $b \in \mathbb{R}$, hängt vom Wert b ab. Es gilt:

(a) $0 < |b| < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} b^n = 0$

(b) $b = 0 \Longrightarrow \lim b^n = 0$
$b = 1 \Longrightarrow \lim b^n = 1$
$b = -1 \Longrightarrow (b^n)$ ist divergent

(c) $b > 1 \Longrightarrow \lim b^n = \infty \rightsquigarrow (b^n)$ ist bestimmt divergent
$b < -1 \Longrightarrow (b^n)$ ist divergent (NICHT bestimmt divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$)

4.34 Definition (Teilfolge)

Es sei $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < \ldots < n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq k$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$$

Teilfolge von (a_n).

4.35 Beispiel

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge, $n_k := 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(a_{n_k}) = (a_{2k}) = (a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots)$$

Teilfolge von (a_n). Die Folge $(a_n)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ hat Teilfolge $(a_{2k})_{k \geq 1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$.

4.36 Bemerkung

Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis

ohne Beweis.

□

4.37 Satz (Satz von Bolzano Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis

Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Nach 4.36 existiert eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die natürlich auch beschränkt ist. Somit ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nach 4.21 eine konvergente Folge.

□

4.38 Beispiel

$a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

- $(-1)^{2k}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge $\xrightarrow{k\to\infty}$ 1
- $(-1)^{2k+1}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge $\xrightarrow{k\to\infty}$ -1

4.39 Definition (Häufungspunkt)

$a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** einer Folge (a_n)
$:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n), die gegen a konvergiert.

4.40 Beispiele

(a) Die Häufungspunkte der Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind 1 und -1 (siehe 4.38).

(b) Häufungspunkte der Folge $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Die Folge ist konvergent. Der Grenzwert 0 ist hier einziger Häufungspunkt.

(c) $\left((1+n) \mod 4\right)_{n\in\mathbb{N}}$
$\rightsquigarrow$ $(1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0 \ldots)$
Häufungspunkte sind $0, 1, 2, 3$.

4.41 Definition (Intervallschachtelung)

Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n] \text{ mit } a_n \le b_n \quad \forall\, n \ge k$$

heißt **Intervallschachtelung**

$$:\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & I_k \supset I_{k+1} \supset I_{k+2} \supset \dots \\ \text{(ii)} & \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \end{array}$$

4.42 Satz (Prinzip der Intervallschachtelung)

Vor: $I_n = [a_n, b_n]$ sei eine Intervallschachtelung

Beh:

(a) (a_n) und (b_n) sind konvergente Folgen mit $\lim a_n = \lim b_n$.

(b) $a := \lim a_n = \lim b_n$ ist die einzige reelle Zahl, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

Eine Intervallschachtelung definiert also eine eindeutig bestimmte, reelle Zahl.

Beweis

ohne Beweis.

□

4.43 Bemerkung und Definition

Beh: Es seien $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $(b_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}^*$

Dann bilden die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}^*$ eine Intervallschachtelung.

Definition

Die nach 4.42 eindeutig bestimmte, reelle Zahl

$$e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

heißt **Eulersche Zahl**[1] $e \approx 2.718$.

Beweis

Es gilt

(A) $a_n \le b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, denn $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{\ge 1} = b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

(B) (a_n) ist monoton wachsend (siehe Zentralübung)

(C) (b_n) ist monoton fallende Folge (Übungsaufgabe)

Aus (A), (B) und (C) folgt

[1] Euler Leonhard (1707 - 1783)

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$
Wegen

$$0 \overset{(A)}{\leq} b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}^{\leq 3} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{3}{n}$$

folgt mit SWT

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

□

4.44 Bemerkung

Vor: $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, (a_n) konvergente Folge mit $a_n \geq 0$.
Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Beweis

ohne Beweis.

□

4.45 Definition (Cauchy-Folge)

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt **Cauchy-Folge**[2]
$:\Longleftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N$.

4.46 Satz

Vor: (a_n) sei eine Folge reeller Zahlen
Beh: (a_n) konvergent $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

4.47 Anmerkung

Statt Axiom (A13) kann man auch das archimeidsche Prinzip und die Konvergenz von Cauchy-Folgen als Axiome für die reellen Zahlen wählen (siehe [Forster1]).

[2] Cauchy Louis (1789 - 1857)

§ 5 Unendliche Reihen

Unendliche Reihen sind spezielle Folgen. Dieser Paragraph befasst sich mit der Konvergenz bzw. Divergenz unendlicher Reihen.

5.1 Zahlenbeipsiele

k	$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$	$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1.01}}$
10	≈ 2.929	≈ 1.550	≈ 2.902
100	≈ 5.187	≈ 1.635	≈ 5.083
10000	≈ 9.788	≈ 1.645	≈ 9.377

5.2 Definition (Partialsumme, unendliche Reihe)

Es sei $(a_n)_{n\geq k}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Die endliche Summe

$$s_m := \sum_{n=k}^{m} a_n \quad , \ m \geq k$$

heißt **Partialsumme**.

(b) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m\geq k}$ heißt **unendliche Reihe** und wird mit

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

bezeichnet.

(c) Konvergiert die Folge $(s_m)_{m\geq k}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

bezeichnet.

5.3 Anmerkung

Das Symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ bezeichnet immer die Folge $\left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n\right)_{m\geq k}$ der Partialsummen.
Im Fall der Konvergenz bezeichnet es auch den Grenzwert $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=k}^{m} a_n$.
$\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ist dann eine eindeutig bestimmte reelle Zahl.

5.4 Beispiel

Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ist zunächst die Folge $(s_m)_{m\geq 1}$ der Partialsummen, wobei

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} \quad , \ m \geq 1$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \ldots + \frac{m-1}{m} - \frac{m-2}{m-1} + \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m} \\ &= \frac{m}{m+1} \end{aligned}$$

Der Grenzwert der Folge $(s_m)_{m \geq 1}$ existiert und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{m \to \infty} s_m \overset{(*)}{=} \lim_{m \to \infty} \frac{m}{m+1} = 1$$

Bemerkung: s_m ist eine Teleskop-Summe

5.5 Satz (unendliche geometrische Reihe (UGR))

Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Beweis

Sei $|x| < 1$. Für die Partialsummen gilt:

$$(*) \quad s_m = \sum_{n=0}^{m} x^n \overset{1.13}{=} \frac{1 - x^{m+1}}{1-x}$$

Wegen $|x| < 1$ ist $\lim\limits_{m \to \infty} x^m \overset{4.33}{=} 0$ und damit ist auch $\lim\limits_{m \to \infty} x^{m+1} = x \cdot \lim\limits_{m \to \infty} x^m = 0$. Mit den Rechenregeln folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{m \to \infty} s_m \underset{(*)}{\overset{4.22}{=}} \frac{\lim 1 - \lim x^{m+1}}{\lim 1 - \lim x} = \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

□

5.6 Beispiele

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots \rightsquigarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Beh: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3}$

Beweis

Wende 5.5 für $x = -\frac{1}{2}$ an.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

□

(b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Beh: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}$

Beweis

Für $x = \frac{1}{3}$ gilt:

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \overset{5.5}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Wir erhalten:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}_{(**)} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$(**)$ Aus der Existenz dieses Grenzwertes folgt die Existenz des Grenzwertes von $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

□

(c) Achilles und die Schildkröte (siehe Zentralübung)

5.7 Satz (Rechenregeln für unendliche Reihen)

Vor: Sei $k \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ seien konvergente Reihen, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beh: $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=k}^{\infty}(a_n-b_n)$ und $\sum_{n=k}^{\infty}\lambda a_n$ sind konvergente Reihen und

$$\sum_{n=k}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=k}^{\infty}a_n + \sum_{n=k}^{\infty}b_n$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}(a_n-b_n) = \sum_{n=k}^{\infty}a_n - \sum_{n=k}^{\infty}b_n$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=k}^{\infty}a_n$$

Beweis

Folgt aus Definition 5.2 und den Rechenregeln für konvergente Folgen.

□

5.8 Beispiel (Darstellung einer periodischen Dezimalzahl als rationale Zahl)

Es sei $a = 0.45\overline{37}$, das bedeutet

$$a = \frac{45}{100} + \frac{37}{10^4} + \frac{37}{10^6} + \ldots \rightsquigarrow a = \frac{45}{100} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{37}{10^{4+2n}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{37}{10^{4+2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{37}{10^4} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n \overset{5.5}{\underset{5.7}{=}} \frac{37}{10^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$
$$\overset{5.5}{=} \frac{37}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{37}{10^4} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{37}{9900}$$

Daraus folgt:

$$a = \frac{45}{100} + \frac{37}{9900} = \frac{4492}{9900} = \frac{1123}{2475}$$

Konvergenzkriterien für Reihen

5.9 Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium (CKK))

Vor: $(a_n)_{n \geq k}$ Folge reeller Zahlen

Beh: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\colon \left| \sum\limits_{n=l}^{m} a_n \right| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq l \geq N$

Beweis

Siehe [Fo1].

□

5.10 Bemerkung

Entsteht aus einer konvergenten Reihe durch Entfernen, Hinzufügen, Abändern endlich vieler Summanden eine neue Reihe, so ist diese wieder konvergent (folgt direkt aus dem CKK).
Der Wert der Reihe kann sich dabei natürlich ändern.

5.11 Satz

Vor: $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \geq k$

Beh: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent $\implies \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig (aber fest) vorgegeben. Dann existiert nach 5.9 CKK ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left| \sum_{n=l}^{m} a_n \right| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq l \geq N$$

Insbesondere gilt für $m = l$

$$|a_m| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq N$$

Somit ist (a_n) eine Nullfolge.

□

5.12 Anmerkung

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\overset{\text{i.A.}}{\Longrightarrow} \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ist konvergent

Beispiel: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

5.13 Beispiele

(a) Beh: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k$ ist divergent.

Beweis

$((-1)^k)$ ist KEINE Nullfolge $\overset{5.11}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ ist divergent.

□

(b) Beh: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ist divergent.

Beweis

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{4.43}{=} e > 0$, d. h. $\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ ist KEINE Nullfolge.
Somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k$ nach 5.11 divergent.

□

5.14 Satz

Vor: $x \in \mathbb{R}$ und $|x| \geq 1$.

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist divergent.

Beweis

Für $|x| \geq 1$ ist nach 4.33 $(x^n)_{n\geq 0}$ KEINE Nullfolge. Mit 5.11 folgt die Behauptung.

□

Zusammenfassung der Sätze 5.5 und 5.14

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x$ konvergent $\iff |x| < 1$

(b) $|x| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

5.15 Bemerkung

Vor: $a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.

Beh: $(*)$ $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent $\iff$ $\exists\, K > 0$ mit $\sum\limits_{n=k}^{m} a_n < k \quad \forall\, m \geq k$.

Beweis

Wegen $a_n \geq 0$ ist die Folge $\left(\sum\limits_{n=k}^{m} a_n\right)_{m \geq k}$ der Partialsummen monoton wachsend. Die rechte Seite der behauptung bedeutet, dass die FOlgen der Partialsummen nach oben beschränkt ist. Mit 4.21 (siehe auch Ergänzung dazu) folgt die Behauptung.

□

Bemerkung: Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

5.16 Satz (Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen)

Vor:

- $(a_n)_{n \geq k}$ monoton fallende Folge
- $a_n \geq 0 \quad \forall\, n \geq k \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Beh:

(a) $\sum\limits_{n=k}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.

(b) Für $m \geq k$ gilt:

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=k}^{m} (-1)^n a_n \right| \leq a_{m+1}$$

Beweis

O. E. sei $k = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt für $k \geq 2$:

$$s_k - s_{k-2} = (-1)^{k-1} a_{k-1} + (-1)^k a_k = (-1)^k \cdot \underbrace{(a_k - a_{k-1}}_{\leq 0}$$

Also gilt

$$s_0 \geq s_2 \geq s4 \geq \ldots \quad \text{und} \quad s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots$$

Die Folge $(s_{2k+1})_{k \geq 0}$ ist monoton wachsend und wegen

$$s_{2k+1} = s_{2k} - \underbrace{2_{2k+1}}_{\geq 0} \leq s_{2k} \leq s_0$$

nach oben beschränkt, also konvergent (nach 4.21).

Wegen $s_{2k+1} = s_{2k} - s_{2k+1}$ ist auch die Folge $(s_{2k})_{k \geq 0}$ konvergent und hat den gleichen

Grenzwert wie die Folge $(s_{2k+1})_{n\geq 0}$, da $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge ist.
Also konvergiert die Folge $(s_n)_n \geq 0$ (Teil (a) bewiesen) und für $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ gilt:

$$s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \ldots \geq s \geq \ldots \geq s_5 \geq s_3 \geq s1$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann liegt s zwischen s_n und s_{n+1}. Mit $|s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}$ folgt Behauptung (b).

□

5.17 Beispiel

Nach 5.16 sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = (-1) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ konvergent.

5.18 Definition (absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent** $:\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=k}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent.

5.19 Bemerkung

$\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergent.

Beweis

$\sum a_n$ absolut konvergent $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum |a_n|$ konvergent.

$\overset{5.9,\text{CKK}}{\Longrightarrow}$ $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, N \geq k\colon \Big| \underbrace{\sum\limits_{n=l}^{m} |a_n|}_{\geq 0} \Big| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq l \geq N.$

$\Longrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ mit

$$\Big|\sum_{n=l}^{m} a_n\Big| \overset{\Delta\text{-UG}}{\leq} \sum_{n=l}^{m} |a_n| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq l \geq N \overset{\text{CKK}}{\Longrightarrow} \sum a_n \text{ konvergent.}$$

□

5.20 Anmerkung

$\sum a_n$ konvergent $\overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ absolut konvergent

Gegenbeispiel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent (nach Leibnitz), aber nicht absolut konvergent, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ist divergent}$$

5.21 Satz (Majorantenkriterium)

Vor:

- $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ sei konvergent
- $c_n \geq 0 \quad \forall\, n \geq k$
- $|a_n| \leq c_n \quad \forall\, n \geq k$

Beh: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

$\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ heißt **konvergente Majorante** von $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig (aber fest) vorgegeben.
$\sum c_n$ konvergent $\overset{\text{CKK}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, N \in \mathbb{N},\, N \geq k$ mit $\left|\sum_{n=k}^{m} c_n\right| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq l \geq N$
$\Longrightarrow \left|\sum_{n=l}^{m} |a_n|\right| = \sum_{n=l}^{m} |a_n| \overset{\text{Vor.}}{\leq} \sum_{n=l}^{m} c_n \overset{c_n \geq 0}{=} \left|\sum_{n=l}^{m} c_n\right| < \varepsilon \quad \forall\, m \geq l \geq N$
$\overset{\text{CKK}}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ ist absolut konvergent.

□

5.22 Satz (Minorantenkriterium)

Vor: $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ divergente Reihe, $a_n \geq c_n \geq 0 \quad \forall\, n \geq k$

Beh: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ist divergent.

$\sum c_n$ heißt **divergente Minorante**.

Beweis

Annahme $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ist konvergent.
$\overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow}$ $\sum a_n$ ist konvergente Majorante von $\sum c_n$ $\overset{5.21}{\Longrightarrow}$ $\sum c_n$ ist konvergent $\lightning$

□

5.23 Beispiele für divergente Reihen

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ ist divergent (Begründung siehe (iii))

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda n}$, $\lambda \neq 0$, ist divergent.

Beweis (zu (iii))

Annahme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda n}$ ist konvergent.

$\Longrightarrow \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda n}$ ist konvergent $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent $\lightning$

□

5.24 Beispiel (Teil einer SE-Aufgabe)

(a) Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ ist divergent.

Nebenrechnung: $\frac{1+n}{1+n^2} \geq \frac{1}{n} \iff (1+n)n \geq 1+n^2 \iff n^2+n \geq n^2+1$ (wahr für $n \geq 1$)

Beweis

Aus Nebenrechnung folgt

$$\frac{1+n}{1+n^2} \geq \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

$\overset{5.22}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergente Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ ist divergent.

$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ ist divergent.

□

(b) Beh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+2n^2}$ ist divergent.

Beweis

Es gilt:

$$\frac{1+n}{1+2n^2} \geq \frac{n}{1+2n^2} \geq \frac{n}{n^2+2n^2} = \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}$$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ ist divergente Minorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+2n^2}$, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+2n^2}$ ist divergent.

□

5.25 Anmerkung

(a) Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Weitere Formeln mit Exponenten $l = 6, 8, \ldots$ erhält man mit dem MAPLE-Kommando `sum(1/n^1, n=1..infinity);`

(b) Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^l}$ mit $l = 3, 5, \ldots$ sind KEINE (einfachen) Formeln bekannt.

(c) Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\mu}$ konvergent für alle reellen Zahlen $\mu > 1$.
Bemerkung: Für $\mu = 1$ erhält man die divergente harmonische Reihe. Insbesondere sind $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ usw. konvergent.

Beweis

Übungsaufgabe.

□

5.26 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Man untersuche auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)}$ ist konvergent.

Beweis

$\frac{1}{(n+1)(n+5)} \leq \frac{1}{n^2}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, folgt mit dem Majorantenkriterium die Behauptung.

□

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+5)} = \frac{25}{48}$

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+1)(n+5)} \overset{\text{ZÜ}}{=} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \ldots - \frac{1}{m+1} - \ldots - \frac{1}{m+5}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{m+2} - \ldots - \frac{1}{m+5}\right) \end{aligned}$$

$$s_m \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$$

□

5.27 Satz (Quotientenkriterium (QK))

Vor: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ sei eine Reihe mit folgenden Eigenschaften: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq k$ und ein $\vartheta \in \mathbb{R}$, $0 < \vartheta < 1$ derart, dass

(1) $a_n \neq 0 \quad \forall\, n \geq n_0$

(2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \vartheta \quad \forall\, n \geq n_0$

Beh: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.

Beweis (sehr lehrreich!)

O. E. $k = 0$, $n_0 = 0$

Es gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{\text{Vor.}}{\leq} \vartheta \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \; |a_{n+1}| \leq \vartheta \cdot |a_n| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ (1) $|a_n| \leq |a_0| \cdot \vartheta^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Weiter gilt: (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_0| \cdot \vartheta^n$ ist wegen $0 < \vartheta < 1$ konvergent (UGR, Rechenregeln)

(3) $|a_0| \cdot \vartheta^n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Aus (1), (2) und (3) folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_0| \cdot \vartheta^n$ eine konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist.

Mit dem Majorantankriterium 5.21 folgt die Behauptung.

□

5.28 Beispiel (Teil einer Staatsexamensaufgabe)

Beh: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ist (absolut) konvergent.

Beweis

$\frac{n^2}{2^n} \neq 0$ für $n \geq 1$. Für $n \geq 1$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

Wähle $n_0 = 3$, $\vartheta = \frac{8}{9}$. Dann gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \vartheta \quad \text{für } n \geq n_0$$

Mit QK folgt die Behauptung.

□

5.29 Notizen

(a) ∇ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \forall\, n \geq n_0 \overset{\text{i.A.}}{\not\Longrightarrow} \sum a_n$ (absolut) konvergent.

Beispiel: Für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall\, n \geq 1$$

aber $\sum \frac{1}{n}$ ist divergent.

(b) ∇ Nicht jede absolut konvergente Reihe erfüllt die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums.

Beispiel: $\sum \frac{1}{n^2}$ ist absolut konvergent, aber

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

5.30 Satz

Vor: $(a_n)_{n\geq k}$ Folge mit $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall\, n \geq n_0 \geq k$

Beh: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beweis

Sei $n \geq n_0$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$

$\implies |a_{n+1}| \geq |a_n| \quad \forall\, n \geq n_0$
$\implies |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0 \quad \forall\, n \geq n_0$
$\implies (a_n)$ ist KEINE Nullfolge
$\overset{5.11}{\implies} \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ ist divergent.

□

5.31 Satz (Wurzelkriterium (WK))

Vor: Sei $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit folgenden Eigenschaften: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq k$ und ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \vartheta < 1$ derart, dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta \quad \forall\, n \geq n_0$$

Beh: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

Beweis

O. E. $k = 0$, $n_0 = 0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \vartheta \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \implies |a_n| \leq \vartheta^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\overset{0<\vartheta<1,\text{UGR}}{\dashrightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \vartheta^n$ ist konvergente Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$
$\overset{\text{Maj.krit.}}{\dashrightarrow}$ Behauptung

□

5.32 Beispiel

Beh: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)^k$ ist absolut konvergent.

Beweis

$$\sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k+1}\right)^k} = \frac{k}{2k+1} \leq \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \quad , \; k \geq 1$$

Wähle $n_0 = 1$, $\vartheta = \frac{1}{2}$. Mit dem WK folgt die Behauptung.

□

5.33 Satz

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N} \implies \sum a_n \text{ divergent}$$

Beweis

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \forall\, n \geq n_0 \implies |a_n \geq 1 \quad \forall\, n \geq n_0$$

$\implies$ (a_n) ist KEINE Nullfolge $\overset{5.11}{\implies}$ $\sum a_n$ ist divergent.

□

5.34 Satz (Limesform von QK und WK)

Vor: $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ unendliche Reihe reeller Zahlen.

Beh: $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ (QK), $n_0 \geq k$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$

$$\implies \begin{cases} \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n & \text{ist konvergent für } \alpha < 1 \\ \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n & \text{ist divergent für } \alpha > 1 \text{ oder } \alpha = +\infty \end{cases}$$

Beweis

Folgt aus dem QK und Satz 5.30 bzw. aus dem WK und Satz 5.33.

□

5.35 Beispiel (Teil einer Staatsexamensaufgabe)

Beh: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{2^n+3^n}{4^n}$ ist konvergent.

Beweis

Idee: Finde mit Hilfe des QK eine konvergente Majorante.

Es gilt:

$$(*)\; a_n = n^2 \cdot \frac{2^n + 3^n}{4^n} \leq n^2 \cdot \frac{3^n + 3^n}{4^n} = 2n^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n =: c_n$$

Weiter gilt:

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{2(n+1)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{2n^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{4} < 1$$

Nach dem QK (Limesform) ist $\sum c_n$ konvergent. Wegen $(*)$ ist $c_n \geq a_n = |a_n| \geq 0$ und $\sum a_n$ ist nach dem Majorantenkriterium konvergent.

□

Zitterwesen der unendlichen Reihe: reelle Zahl oder nicht?

Unendliche Reihen sind gut für das Schulen logischen Denkens, da sie über unseren „normalen Umgang“ mit reellen Zahlen hinausgehen.

§ 6 Ergänzungen zur Menge der reellen Zahlen

6.1 Definition (adischer Bruch)

Es sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$$

mit $k \geq 0$, $a_n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n < b$ heißt **b-adischer Bruch**.

6.2 Notiz

b-adische Brüche schreibt man auch in der Form

$$\pm a_{-k} a_{-k+1} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_b$$

Ist b festgelegt, so lässt man den Index b weg.

6.3 Beispiele

- $b = 10$ (Dezimalzahlen):

$$21.8\overline{9} \stackrel{\wedge}{=} 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^-2 + 9 \cdot 10^{-3} \dots$$

- $b = 2$ (Dualzahlen):

$$110.101 \stackrel{\wedge}{=} 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} \dots$$

- $b = 16$ (Hexadezimalzahlen)
  a_n zwischen 0 und 15 werden durch die Symbole $0, 1 \dots, 9, A, B, C, D, E, F$ bezeichnet.

$$1AE.0D3 \stackrel{\wedge}{=} 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 + 0 \cdot 16^{-1} + 13 \cdot 16^{-2} + 3 \cdot 16^{-3} + 0 \cdot 16^{-4} \dots$$

6.4 Satz

Jeder b-asdische Bruch konvergiert, d. h. jeder b-adische Bruch stellt eine eindeutige bestimmte reelle Zahl dar.

Beweis

Idee: CKK anwenden. Sehr lehhreicher Beweis; sollte verstanden werden.

Sei O. E. $\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ ein b-adischer Bruch. Für $n \geq m \geq -k$ gilt dann:

$$\left| \pm \sum_{l=m}^{n} a_l b^{-l} \right| = \sum_{l=m}^{n} \underbrace{a_l}_{\leq b-1} b^{-l} \leq \sum_{l=m}^{n} (b-1) b^{-l} \overset{\text{Indexversch.}}{=} \sum_{l=0}^{n-m} (b-1) b^{-l-m}$$

$$= (b-1) b^{-m} \sum_{l=0}^{n-m} b^{-l} \leq (b-1) b^{-m} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^l$$

$$\overset{5.5,\text{UGR}}{=} (b-1) b^{-m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = \frac{b-1}{b^m} \cdot \frac{b}{b-1} = \left(\frac{1}{b}\right)^{m-1} \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

Mit dem CKK folgt die Konvergenz der Reihe.

□

6.5 Satz

Vor: $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Beh: x lässti sich durch einen b-adischen Bruch darstellen, d. h.

$$x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n} \quad \text{mit } k \geq 0, 0 \leq a_n < b$$

Beweis

Siehe [Fo1], § 5, Satz 5.

□

6.6 Frage 1

Stellen $1.8\overline{9}$ und 1.9 die gleiche reelle Zahl dar?

Was bedeutet $1.8\overline{9}$?
Berechnung der unendlichen Reihe.

$$1.8\overline{9} = 1.89 + \sum_{n=2}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n \overset{\text{UGR}}{=} 1.8 + 9 \left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n}_{\text{UGR}} - \left(1 + \frac{1}{10}\right) \right)$$

$$= 1.9 + 9 \cdot \left(\frac{10}{9} - \frac{11}{10}\right) = 1.9 + 9 \cdot \left(\frac{100-99}{90}\right) = 1.8 + 9 \cdot \frac{1}{90} = 1.9$$

Schulmethode

(a) $1.8\overline{9} = 1 + \frac{8}{10} + \underbrace{\frac{1}{10} \cdot 0.\overline{9}}_{=0.0\overline{9}=\frac{9}{90}\ldots} = 1 + \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} = 1.9$

(b) $0.4\overline{5} + 0.\overline{7} = ?$
$0.4\overline{5} \neq 0.\overline{7} = \frac{4}{10} + \frac{5}{90} + \frac{7}{9} = \frac{36+5+70}{90} = 1\frac{21}{90} = 1.2\overline{3}$

6.7 Frage 2

Wie ist folgende aus dem Orient stammende Multiplikationsmethode (für natürlich Zahlen) zu erklären?
Drei Rechenarten bekannt:

(1) Addition

(2) Multiplikation mit 2

(3) Division mit 2, wobei der Rest ignoriert wird

(4) Zusatz: Gerades ist im Zusammenhang mit der Division „des Teufels“

Berechne $23 \cdot 125$:

Division	Multiplikation
23	125
11	250
5	500
~~2~~	~~1000~~
1	+2000
	2875

In Zeile vier ist Regel (4) verletzt. Das Ergebnis stimmt.

Berechne $24 \cdot 45$:

Division	Multiplikation
~~24~~	~~45~~
~~12~~	~~90~~
~~6~~	~~180~~
3	360
1	+720
	1080

§ 7 Stetige Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Siehe auch Anhang A.

7.1 Definition (stetige Funktion)

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $a \in D$.

(a) f heißt **stetig** im Punkt $a :\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)_n$, $x_n \in D$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

(b) f heißt stetig (in D)

$$:\Longleftrightarrow \; f \text{ ist stetig in jedem Punkt von } D$$

(c) Ist f in einem Punkt $a \in D$ NICHT stetig, so sagt man auch: f ist in a unstetig.

7.2 Anmerkungen

f stetig in a bedeutet:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}_{(*)} = \underbrace{f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)}_{(**)}$$

„Reinziehen“ des „Grenzwertprozesses“ möglich, da f stetig!
$(*)$ wende die Funktion f auf jedes x_n an und bestimme dann den Grenzwert der Folge $\big(f(x_n)\big)_n$
$(**)$ Bestime den Grenzwert der Folge $(x_n)_n$ und wende darauf die Funktion f an.

7.3 Satz (Epsilon-Delta-Kriterium für die Stetigkeit)

Vor: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion
Beh: f ist stetig in $a \in D \iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(*) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \mathbb{D} \text{ mit } |x - a| < \delta$$

Beweis

(⇒) (indirekter Beweis)

Annahme, R.S. gilt NICHT, d. h. es gibt ein $\varepsilon' > 0$ derart, dass zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in D$ existiert mit $|x - a| < \delta$, aber $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon'$.
Insbesondere existiert dann zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon' > 0$$

d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ aber $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ $\lightning$

($\Leftarrow$)

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \in D$ und $\lim x_n = a$.

Zu zeigen: $\lim f(x_n) = f(a)$.

Sei $\varepsilon > 0$ (beliebig) vorgegeben und δ erfülle $(*)$ bezüglich des vorgegebenen ε.

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|x_n - a| < \delta \quad \forall\, n \geq N$$

Daraus folgt mit $(*)$:

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\lim f(x_n) = f(a)$$

□

7.4 Satz

Vor: $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien in $a \in D$ stetig, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beh:

(a) $f + g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig in a.

(b) Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}\colon D' \longrightarrow \mathbb{R}$ in a stetig, wobei $D' := \left\{ x \in D \;\middle|\; g(x) \neq 0 \right\}$.

Beweis

Anwendung der Rechenregeln für konvergente Folgen.

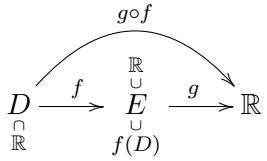
□

7.5 Satz

Vor: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktionen, wobei $f(D) \subset E \subset \mathbb{R}$. F sei in $a \in D$ und $g \in b := f(a) \in E$ stetig.

Beh: $g \circ f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in a stetig.

Skizze



Beweis (zu 7.5)

(x_n) Folge in D mit $\lim x_n = a$.
Zu zeigen: $\lim(g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$.

Sei

$$(*)\ y_n := f(x_n) \in E$$

Dann gilt

$$\lim y_n = \lim f(x_n) \overset{f \text{ stetig in } a}{=} f(a) = b$$

Wegen g stetig in b folgt damit

$$(**)\ \lim g(y_n) = g(b)$$

Wir erhalten

$$\lim \underbrace{(g \circ f)(x_n)}_{g\left(f(x_n)\right)} \overset{(*)}{=} \lim g(y_n) \overset{(**)}{=} g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

□

7.6 Beispiele für stetige Funktionen

(a) $c \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(x) = c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ (konstante Funktionen).
Dann ist f stetig in $\mathbb{R}$.
Denn: $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c = c = f(a)$

(b) Die Funktion $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ (Identität) ist stetig in $\mathbb{R}$.
Denn: $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(a)$

(c) Die Funktion $\mathrm{abs}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathrm{abs}(X) = |x|$ ist stetig in $\mathbb{R}$.
Denn: $a \in \mathbb{R}$ und $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a \implies \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{abs}(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \overset{4.22,(e)}{=} |a| = \mathrm{abs}(a)$

(d) Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in D. Dann ist $|f|\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto |f(x)|$ stetig in D.
Denn: f stetig in $D \overset{(c),7.5}{\implies} |f| = \mathrm{abs} \circ f$ stetig in D.

(e) Polynomfunktionen $p\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad ,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n$$

sind stetig. Dies folgt aus (a), (b) und 7.4.

(f) Rationale Funktionen: Es seien

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

Polynome und

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; q(x) \neq 0 \right\}$$

Dann ist die rationale Funktion $r = \frac{p}{q}$ definiert durch

$$r \colon D \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ m \longmapsto r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

stetig in D. Dies folgt aus (e) und Satz 7.4,(b).

(g) $f, g \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien stetig in $a \in D$. Dann sind

$$h_1 \colon D \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto h_1(x) := \max\big(f(x), g(x)\big)$$

und

$$h_2 \colon D \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto h_2(x) := \min\big(f(x), g(x)\big)$$

stetig in a.
Denn: $h_1(x) = \max\big(f(x), g(x)\big) \overset{2.17,(f)}{=} \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big) \quad \forall\, x \in D$
$\overset{7.4}{\Longrightarrow}$ h_1 ist stetig in D.
Analog für h_2.

(h) $f \colon [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \sqrt[k]{x}$$

mkt $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann ist $f(x)$ stetig in $[0, \infty[$.
Die Behauptung folgt aus Bemerkung 4.44.

7.7 Beispiele für Stetigkeit und Unstetigkeit

. . . , die der Anschauung NICHT zugänglich sind.

(a) $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \ \text{ (d. h. } x \text{ irrational)} \\ 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

f ist in KEINEM Punkt aus $[0,1]$ stetig.

(b) Die folgende Funktion geht auf Dirichlet[3] zurück.
$f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{q} & \text{für } x \in [0,1],\ x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

f ist stetig für alle $a \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ und unstetig für alle $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

[3] Johann Dirichlet (1805 - 1859)

§ 8 Sätze über stetige Funktion

In diesem Paragraphen sei I ein Intervall. I kann also folgende Formen haben:
$[a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$, $[a,b[$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$,
$]-\infty,\infty[$
$[-\infty,b]$, $[-\infty,b[$, $[a,\infty[$, $]a,\infty[$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

8.1 Satz

Vor: Die FUnktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in $x_0 \in I$ und $x \in \mathbb{R}$.
Beh: Ist $f(x_0) < c$, so gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$.
Analog für $f(x_0) < c$.

Beweis

(i) Sei $c = 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) > \varepsilon > 0$ $(*)$.
f ist stetig in $x_0 \implies$ es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x) - f_(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

$\implies f(x) > f(x_0) > 0$ oder $-(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap I$
$\implies f(x) > 0 \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap I$.

(ii) Sei $c \in \mathbb{R}$. Definiere $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - c$.
Aus $f(x_0) > c$ folgt $g(x_0) = f(x_0) - x > 0$.
Nach (i) existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x) > 0 \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap I$.
Daraus folgt $f(x) = g(x) + c > c \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap I$
Analog für $f(x_0) < c$.

□

8.2 Satz

Vor: $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion, $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$.
Beh:

(a) Existenz einer Nullstelle, Nullstellensatz
$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \implies \exists\, x_0 \in]x_1, x_2[\colon f(x_0) = 0$

(b) (Zwischenwertsatz, ZWS)
$c \in [f(x_1), f(x_2)]$ bzw. $c \in [f(x_2), f(x_1)] \implies \exists\, x_0 \in [x_1, x_2]\colon f(x_0) = c$
(f nimmt jeden Wert zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ an)

Ab hier wurden Beweise NICHT MEHR in LaTeXgesetzt.

8.3 Beispiel

Beh: Die Gleichung

$$(*)\ \underbrace{-2x^5+3x^2-3x+10}_{=:p(x)}=0$$

hat mindestens eine Lösung.

8.4 Bemerkung

Beh: Jedes Polynom $p\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ungeraden Grades hat eine Nullstelle.

8.5 Satz (Existenz von Minimum und Maximum)

Vor: $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. (abgeschlossenes Intervall, beschränkt, d. h. kompakt

Beh: Es existieren $x_1,x_2\in[a,b]$ mit

$$f(x_1)=\max\left\{f(x)\ \middle|\ x\in[a,b]\right\}$$
$$f(x_2)=\min\left\{f(x)\ \middle|\ x\in[a,b]\right\}$$

8.6 Notiz

Die Aussage von Satz 8.5 gilt NICHT, wenn der Definitionsbereich von f ein offenes oder halboffenes Intervall ist.

8.7 Definition (Fixpunkt)

$f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ sei eine Funktion. $a\in D$ heißt **Fixpunkt** von $f\ :\Longleftrightarrow\ f(a)=a$.

8.8 Bemerkung

Beh: $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetige Funktion und $f([a,b])\subset[a,b]\implies f$ besitzt einen Fixpunkt.

8.9 Definition ((streng) monoton wachsend/fallend)

Sei $D\subset\mathbb{R}$, $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) f heißt

$$\left.\begin{array}{c}\underline{\textbf{monoton wachsend}}\\ \underline{\textbf{monoton fallend}}\\ \underline{\textbf{streng monoton wachsend}}\\ \underline{\textbf{streng monoton fallend}}\end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}f(x)\leq f(y)\\ f(x)\geq f(y)\\ f(x)<f(y)\\ f(x)>f(x)\end{array}\right. \quad \forall\, x,y\in\mathbb{D} \text{ mit } x<y$$

(b) f heißt (streng) monoton $:\Longleftrightarrow$ f ist (streng monotn wachsned oder (streng) monoton fallend

8.10 Satz

Vor: $D\subset\mathbb{R}$, $f\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$ streng monotone Funktion.
Beh: f ist injektiv.

8.11 Satz (Satz über die Umkehrfunktion)

Vor: $f\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, f sei streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), $I':=f(I)$.

Beh:

(a) I' ist ein Intervall.

(b) $f\colon I\longrightarrow I'$ ist bijektiv.

(c) $f^{-1}\colon I'\longrightarrow\mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Beweis

[Fo1], § 12, Satz 1

□

8.12 Notiz

▽ f^{-1} und $\frac{1}{f}$ sind verschiedene Funktionen!

8.13 Bemerkung

$k\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

(a) $f\colon[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[\ ,\ x\longmapsto x^k$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

(b) $f^{-1}\colon[0,\infty\longrightarrow[0,\infty[\ ,\ x\longmapsto f^{-1}(x):=\sqrt[k]{x}$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Die Stetigkeit einer Funktion ist eine „lokale“ Eigenschaft. Die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion ist eine „globale“ Eigenschaft.

8.14 Definition (gleichmäßig stetige Funktion)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** (in D)
$:\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall\, x, x' \in D \text{ mit } |x - x'| < \delta$$

8.15 Bemerkung

$D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ glm. stetig in $D \overset{\text{i.A.}}{\not\Longleftarrow} f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in D.

8.16 Satz

Vor: $[a, b]$ sei ein abgeschlossenes, beschränltes Intervall, $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
Beh: f ist stetig $\Longleftrightarrow$ f ist gleichmäßig stetig

8.17 Beispiele

(a) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^2$.
f ist stetig in $[a, b]$. Nach 8.16 ist damit f auch glm. stetig in $[a, b]$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x^2$. f stetig in $\mathbb{R}$, aber NICHT glm. stetig in $\mathbb{R}$. Satz 8.16 NICHT anwendbar, da $\mathbb{R}$ NICHT beschränkt ist.

§ 9 Grenzwerte und Funktionen

Im Folgenden sei $D \subset \mathbb{R}$.

9.1 Fragen

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ d & \text{für } x = 2,\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Gegen welchen Wert „strebt $f(x)$ für x gegen 2“?
$f\Big|_{\mathbb{R}\setminus\{2\}}$ ist eine rationale Funktion und somit nach 7.6,(f) stetig in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Gibt es einen Wert $d \in \mathbb{R}$ derart, dass f stetig im Punkt 2 ist?

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ d & \text{für } x = 0,\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Gegen welchen Wert „strebt $f(x)$ für

- $x \to 0$?
- $x \to \infty$?
- $x \to -\infty$?

Gibt es einen Wert $d \in \mathbb{R}$ derart, dass f stetig im Punkt 0 ist?

9.2 Definition (Häufungspunkt einer Menge)

$a \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** (HP) von D
$:\Longleftrightarrow\ \exists$ Folge (x_n), $x_n \in D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

9.3 Beispiele

(a) D sei das offene Intervall $]-3,5[$. HP von D sind alle $a \in D \cup \{-3,5\} = [-3,5]$.

(b) $D =]-3,5[\cup \{7\} \cup]10,12[$. HP von D sind alle $a \in]-3,5[\cup]10,12[\cup \{-3,5,10,12\} = [-3,5] \cup [10,12]$

(c) $D =]-1,1[\setminus \{0\}$. HP von D sind alle $a \in [-1,1]$

9.4 Definition

Sei $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}$ ein HP von D und $c \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ($f(x) \xrightarrow{x\to a} c$)
$:\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{a\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$

9.5 Notiz

Die Bezeichnungen seien wie bei 9.4.

(a) f hat höchstens einen Grenzwert in a, denn der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig.

(b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ist unabhängig von $f(a)$.

9.6 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ 2 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2)$
Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ d & \text{für } x = 2,\ d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Beh: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

9.7 Satz (Epsilon-Delta-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen)

Vor: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $a \in \mathbb{R}$ HP von D, $c \in \mathbb{R}$.

Beh: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c \iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$ derart, dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$.

9.8 Satz (Rechenregeln)

Vor: $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, $a, \lambda \in \mathbb{R}$, a HP von D. Die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{s\to a} g(x)$ sollen existieren.

Beh:

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existiert und $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$
$\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x)$ exisitert und $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

(b) Ist $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, so gilt:

(i) Es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass $g(x) \neq 0 \quad \forall\ x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$.

(ii) Für die Funktion $\frac{f}{g}\colon \left\{ x \in D \setminus \{a\} \;\middle|\; |x - a| < \delta \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit δ aus (i) existieren $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

9.9 Satz

Vor: $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Funktion.

Beh: Existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \delta$, so ist

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Bemerkung: echt kleiner gilt NICHT!

9.10 Beispiel (Funktion aus einer Staatsexamensaufgabe)

Gegeben sei eine Funktion $f\colon [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{|x|} & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ x + \sqrt{x} & \text{für } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ist f stetig in $[-2, 2]$?

$f\Big|_{[-2,2]\setminus\{0\}}$ ist stetig denn $f\Big|_{[-2,0]}$ und $f\Big|_{]0,2]}$ setzen sich aus stetigen Funktionen zusammen.

9.11 Definition

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, $a, c \in \mathbb{R}$.

(a) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$ (oder $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$, rechtsseitiger Grenzwert)
$:\Longleftrightarrow$ a ist HP von $D \cap]a; \infty[$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \cap]a, \infty[$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$

(b) $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$ (oder $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$, linksseitiger Grenzwert)
$:\Longleftrightarrow$ a ist HP von $D \cap]-\infty, a[$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \cap]-\infty, a[$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$

9.12 Satz

Vor: $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $a, c \in \mathbb{R}$, a HP von D.

Beh:

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \iff \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = c$

(b) Ist $a \in D$, so gilt:

(i) f ist in a stetig $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(ii) f stetig in $a \iff \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$

9.13 Definition (links- bzw. rechtsseitig stetige Funktion)

$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $a \in D$ HP von D.
Dann heißt f **linksseitig** (bzw. **rechtsseitig**) **stetig** in $a \iff \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = f(a)$ (bzw. $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$).

9.14 Notiz

Nach 9.12,(b),(ii) ist $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in a ($a \in D$ HP von D)
$\iff$ f ist in a linksseitig und rechtsseitig stetig

9.15 Beispiel

Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$[x] := \max \left\{ k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; k \leq x \right\} \in \mathbb{Z}$$

$[x]$ heißt **Gauß-Klammer**.

Beispiele: $[7] = 7$, $[6.9] = 6$, $[7.3] = 7$, $[-3.7] = -4$

Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = [x]$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert dür alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{Z\}$.
$\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ existiert für alle $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ existiert für alle $a \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = 1$

f ist rechtsseitig stetig $\forall\ a \in \mathbb{R}$.
f ist linksseitig stetig $\forall\ a \in \mathbb{R}$.
f ist stetig $\forall\ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

9.16 Weitere Bezeichnungen für Grenzwerte von Funktionen

Analog zu 9.4 definiert man

$$\lim_{x \to a} f(x) = x \quad \text{für } a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

(i) $a \in \mathbb{R}$, $c = \infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty :\iff$ a ist HP von D und für jede Folge (x_n), $x_n \in D \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$ (d. h. $f(x_n)$ divergiert bestimmt gegen ∞)
$\iff$ Zu Jedem $k > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $|f(x)| > k \quad \forall\ x$ mit $|x - a| < \delta$

(ii) $a = \infty$, $c \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c \ :\iff$ D ist NICHT nach oben beschränkt und für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \to \infty$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$

§ 10 Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist eine der wichtigsten Funktionen der Mathematik.

10.1 Satz und Definition

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergent.
Wir erhalten damit die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \exp(x)$$

10.2 Satz

Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Insbesondere ist $\exp(1) = e$ (Eulerzahl).

10.3 Satz (Resttermabschätzung)

Vor: $N \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le 1 + \frac{N}{2}$

Beh: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + r_{N+1}(x)$, wobei $|r_{N+1}(x)| \le 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$

10.4 Notiz

Näherungswerte für die Eulerzahl e mit Hilfe von 10.3

	$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$	$2 \cdot \frac{1}{(N+1)!}$
$N = 2$	2.5	$\pm 0.333\ldots$
$N = 5$	$\approx 2.7166\ldots$	$\pm 0.00277\ldots$
$N = 10$	≈ 2.7182818	$\pm 0.501 \cdot 10^{-7}$

10.5 Vorüberlegungen zum Cauchy-Produkt von Reihen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
Wir schreiben die Indizes der Produkte $a_i b_j$ in Matrixform.

b_4	04	14	24	$\vdots$	$\vdots$
b_3	03	13	23	$\vdots$	$\vdots$
b_2	02	12	22	$\vdots$	$\vdots$
b_1	01	11	21	$\vdots$	$\vdots$
b_0	00	10	20	30	$\vdots$
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4

$i+j=0$: $a_0 \cdot b_0 =: c_0$

$i+j=1$: $a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 =: c_1$

$i+j=2$: $a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 =: c_2$

$$i+j=n: \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0}_{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} =: c_n}$$

10.6 Definition (Cauchy-Produkt)

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien Reihen. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad , \text{ mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

das **Cauchy-Produkt** der beiden Reihen.

10.7 Satz

Vor: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien absolut konvergente Reihen.

Beh: Das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \in \mathbb{R}$ ist konvergent.

10.8 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

10.9 Notiz und Definition

Sei e die Eulerzahl.

(a) Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist $e^n = \exp(1)^n \overset{10.8}{=} \exp(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}) = \exp(n)$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $e^x := \exp(x)$.

(c) In der Literatur wird oft auch die Euler-Funktion mit e^x bezeichnet.

10.10 Bemerkung

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(b) $\exp(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(c) $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{2}{(n+1)!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

(d) Die Eulerzahl e ist irrational.

10.11 Satz

Es gilt:

(a) $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend

(b) $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv

(c) $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

(e) $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$ und $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$ ist bijektiv

10.12 Satz

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

10.13 Satz und Definition

Die Funktionen

$$\cosh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \cosh(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) + \exp(-x)\big)$$

und

$$\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \sinh(x) := \frac{1}{2}\big(\exp(x) - \exp(-x)\big)$$

sind stetig in $\mathbb{R}$.

10.14 Werte, Grenzwerte und Graphen zu cosh und *sinh*

x	0	1	2	-1	-2
$\cosh(x)$	1	≈ 1.54	≈ 3.76	≈ 1.54	≈ 3.76
$\sinh(x)$	0	≈ 1.17	≈ 3.62	≈ 1.17	≈ 3.62

cosh ist symmetrisch bzgl. der y-Achse.
sinh ist punktsymmetrisch bzgl dem Nullpunkt.

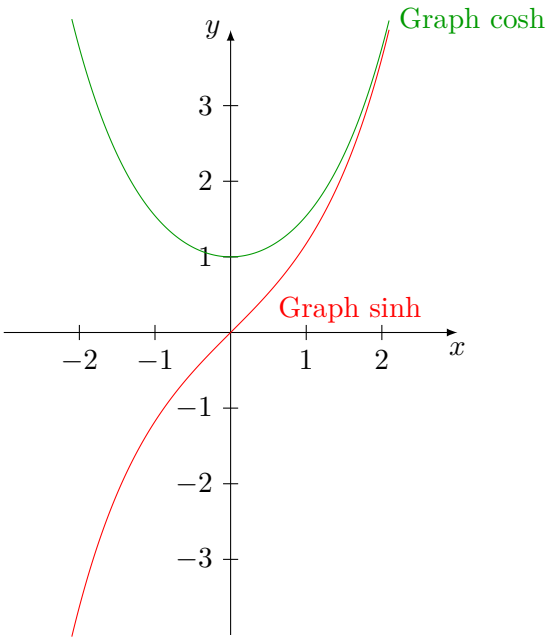
$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{}{\cosh(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \sinh(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \sinh(x) = 0$$



§ 11 Der natürliche Logarithmus ud die allgemine Exponentialfunktion

Nach 10.11,(e) ist die Funktion

$$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow]0,\infty[$$

bijektiv, das heißt zu exp existiert eine Umkehrfunktion.

11.1 Satz und Definition

Die Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow]0,\infty[$ bezeichnet mit $\ln\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv und heißt **natürlicher Logarithmus**.

11.2 Anmerkung

Statt $\ln(x)$ schreibt man auch $\ln_x$

∇ $\ln x + y = \ln(x) + y \neq \ln(x+y)$

In [Fo1] wird statt ln das symbol log verwendet.

11.3 Satz (Funktionalsgleichung fpr den natürlichen Logarithmus)

$\forall\ xy \in]0,\infty[$ gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

11.4 Definition (allgemeine Exponentialfunktion)

Es sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann heißt die FUnktion

$$\exp_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \exp_a(x) := \exp\left(x \cdot \ln(a)\right)$$

allgemine Exponentialfunktion oder Exponentialfunktion zur Basis a.
Statt $\exp_a(x)$ schreibtman auch a^x.
$e^x = \exp_e(x) = \exp\left(x \cdot \ln(e)\right) = \exp(x)$

11.5 Satz

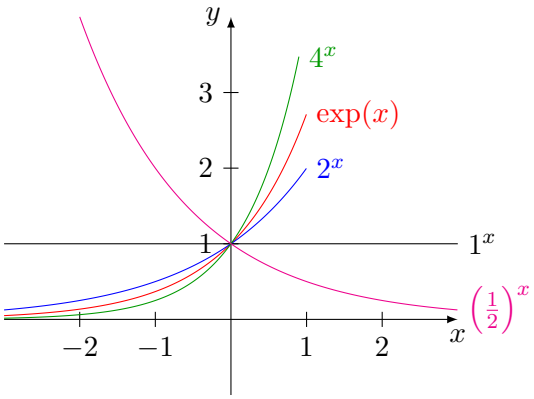
Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann gilt:

(a) $\exp_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

(b) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y) \quad \forall\ x,y \in \mathbb{R}$

(c) $\exp_a(0) = 1$
$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$

(d) $\exp_a(n) = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$



11.6 Bemerkung

Für $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$$

11.7 Beispiel (Staatsexamensaufgabe)

Zeigen Sie für $x > 0$, $y > 0$ die Ungleichung

$$(*) \quad \frac{\ln(x) + \ln(y)}{2} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$\overset{11.3,11.6}{\iff} \ln\left((x \cdot y)^{\frac{1}{2}}\right) \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$\iff (x \cdot y)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{x+y}{2}$
$\iff \sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2} \iff 2\sqrt{x \cdot y} \leq x + y$
$\iff x + y - 2\sqrt{x \cdot y} \geq 0$
$\iff \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ ist eine wahre Aussage.

11.8 Definition (allgemeine Logarithmusfunktion)

Sei $a > 0$, $a \neq 1$.
Die Umkehrfunktion von $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$ heißt **allgemeine Logarithmusfunktion** zur Basis a.

Bezeichnung: $\log_a :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

11.9 Bemerkung

$a > 0$, $a \neq 1$. Dann gilt:

(a) $a^{\log_a(x)} = x$
$\log_a(x)$ ist die Zahl, mit der ich a potenzieren muss, um x zu erhalten.

(b) $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(c) Funktionalgleichung (FG)

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

11.10 Bemerkung

sehr wichtig für Modulprüfung

Für $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ gilt:

(a) $\log_r(a^x) = x \cdot \log_r(a)$ für $r > 0$, $r \neq 1$

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(c) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

11.11 Satz

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$$

Insbesondere ist

$$\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)_{n \geq 1}$$

eine Nullfolge.

11.12 Bemerkung

$x, a, b \in]0, \infty[$, $a \neq 1$. Dann gilt:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

11.13 Beispiel (1024-Bit Verschlüsselung)

Wie viele Dezimalstellen hat eine 1024-Bit Zahl a?
Es gilt

$$2^{1023} \leq a < 2^{1024}$$

$\log_{10} 2^{1023} \approx \log_2 2^{1023} \cdot 0.301 = 1023 \cdot 0.301 \approx 307.9$
$\log_{10} 2^{1024} \approx \log_2 2^{1024} \cdot 0.301 = 1024 \cdot 0.301 \approx 308.2$
Eine 1024-Bit Zahl hat ungefähr 308 Dezimalstellen.

§ 12 Komplexe Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Folgen und Reihen komplexer Zahlen

ausführlicher in [Fo1].

12.1 Definition (konvergente Folge)

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$
$:\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|z_n - z| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N$.
Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$

12.2 Satz

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge komplexer Zahlen, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ mit $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ und $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Dann gilt:
(z_n) konvergent $\Longleftrightarrow$ (x_n) und (y_n) konvergent.
Im Falls der Konvergenz ist

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \mathrm{i} \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

Wegen Datz 12.2 lassen sich fast alle Sätze über die Konvergenz reeller Folgen bzw. Reihen auf komplexe Folgen bzw. Reihen übertragen.

Komplexe Exponentialfunktion

12.3 Satz und Definition

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.
Durch

$$\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

wird eine komplexe Funktion definiert.
Statt $\exp(z)$ schreibt man auch e^z.

12.4 Notiz

$z_n \longrightarrow z \implies \overline{z_n} \longrightarrow \overline{z}$

12.5 Satz

(a) (FG) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$$

(b) $\exp(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$
$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$
$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \quad \forall\, x \in \mathbb{C}$
$\exp(0) = 1$

(c) $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig in $\mathbb{C}$, d. h. für jede Folge (z_n), $z_n \in \mathbb{C}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \exp) z_n) = \exp(z)$.

12.6 Satz

$$|e^{\mathrm{i}y}| = 1 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

12.7 Definition (Eulersche Formel)

Aus der Definition von cos und sin folgt unmittelbar die **Eulersche Formel**:

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

12.8 Satz

Die Funktionen $\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

12.9 Bemerkung (Bezeichnung)

$\cos^2(x) := \cos(x) \cdot \cos(x)$
$\sin^2(x) := \sin(x) \cdot \sin(x)$

Statt $\cos(x)$ bzw. $\sin(x)$ schreibt man auch $\cos x$ bzw. $\sin x$.

12.10 Satz

sehr wichtig für Modulprüfung!

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$

(ii) $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$

(iii) $\cos(-x) = \cos(x)$

(iv) $\sin(-x) = -\sin(x)$

(v) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

(b) **Additionstheoreme**
Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$

(ii) $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(ii) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

12.11 Satz

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Die beiden Reihen sind absolut konvergent $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

12.12 Satz (Resttermabschätzung für **cos** und **sin**)

$\forall\, N \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2N+2}(x)$, wobei $|r_{2N+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!}$ für $|x| \leq 2N+3$.

(b) $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+3}(x)$, wobei $|r_{2N+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+2)!}$ für $|x| \leq 2N+4$.

12.13 Bemerkung

Es gilt:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

12.14 Satz

Die Funktion cos hat im Intervall $]0, 2[$ genau eine Nullstelle. Diese Nullstelle wird mt $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

12.15 Bemerkung

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\cos(x)| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\sin(x)| \leq 1$$

(b) $\exp\left(\mathrm{i} \cdot \frac{m}{2} \cdot \pi\right) = \mathrm{i}^m \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}$

(c) Aus (b) erhalten wir folgende speziellen Werte für exp, cos, sin; dabei benutzen wir $\mathrm{i}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$
$e^{\mathrm{i}x}$	1	i	-1	$-\mathrm{i}$	1	i	$-\mathrm{i}$	-1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0	1	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1	0	0	-1

Die Tabelle enthält folgende Beziehung zwischen fünf wichtigen Konstanten der Mathematik:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Dies wird eine Testfrage bei der Modulprüfung sein!

12.16 Bemerkung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
$\cos(x - 2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$

(b) $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$
$\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$

(c) $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

12.17 Bemerkung

Mit Hilfe von 12.10 und 12.16 kann man aus der Funktion cos im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ die Werte von $\cos(x)$ und $\sin(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ bestimmen.

12.18 Bemerkung (Nullstellen von *sin* und *cos*)

muss man wissen!

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sin(x) = 0\right\} = \left\{k \cdot \pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} =: N_{\sin}$

(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \cos(x) = 0\right\} = \left\{k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} =: N_{\cos}$

12.19 Definition (Tangens, Cotangens)

Die Funktion

$$\tan\colon \mathbb{R} \setminus N_{\cos} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

heißt **Tangens** und die Funktion

$$\cot\colon \mathbb{R} \setminus N_{\sin} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

heißt **Cotangens**.

12.20 Bemerkung

(a) tan und cot sind stetige Funktionen.

(b) Die folgenden Aussagen gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$ für die die Ausdrücke definiert sind.

(i) $\tan(-x) = -\tan(x);\ \cot(-x) = -\cot(x)$

(ii) $\tan(x+\pi) = \tan(x);\ \cot(x+\pi) = \cot(x)$

(iii) $\cot(x) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

(iv) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{\cot(y) \pm \cot(x) \mp 1}$

$\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x) cdot \cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)}$

12.21 Satz

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

(a) $\cos\colon [k \cdot \pi, (k+1) \cdot \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv

(b) $\sin\colon \left[k \cdot \pi - \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv

(c) $\tan\colon \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv

(d) $\cot\colon]k\pi, (k+1)\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv

12.22 Definition (Umkehrfunktionen)

(a) Die Umkehrfunktionen zu
$\cos\colon [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$
$\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$
$\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$
$\cot\colon]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$

heißen

Arkus-Cosinus $\longrightarrow$ $\arccos\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
Arkus-Sinsu $\longrightarrow$ $\arcsin\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
Arkus-Tangens $\longrightarrow$ $\arctan\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
Arkus-Cotangens $\longrightarrow$ $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Man nennt diese mkehrabbildungen auch die Hauptzweige von arccos, arcsin ...

(b) Die Umkehrabbildung zu

$$\cos\colon [k\pi, (k+1)\pi] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

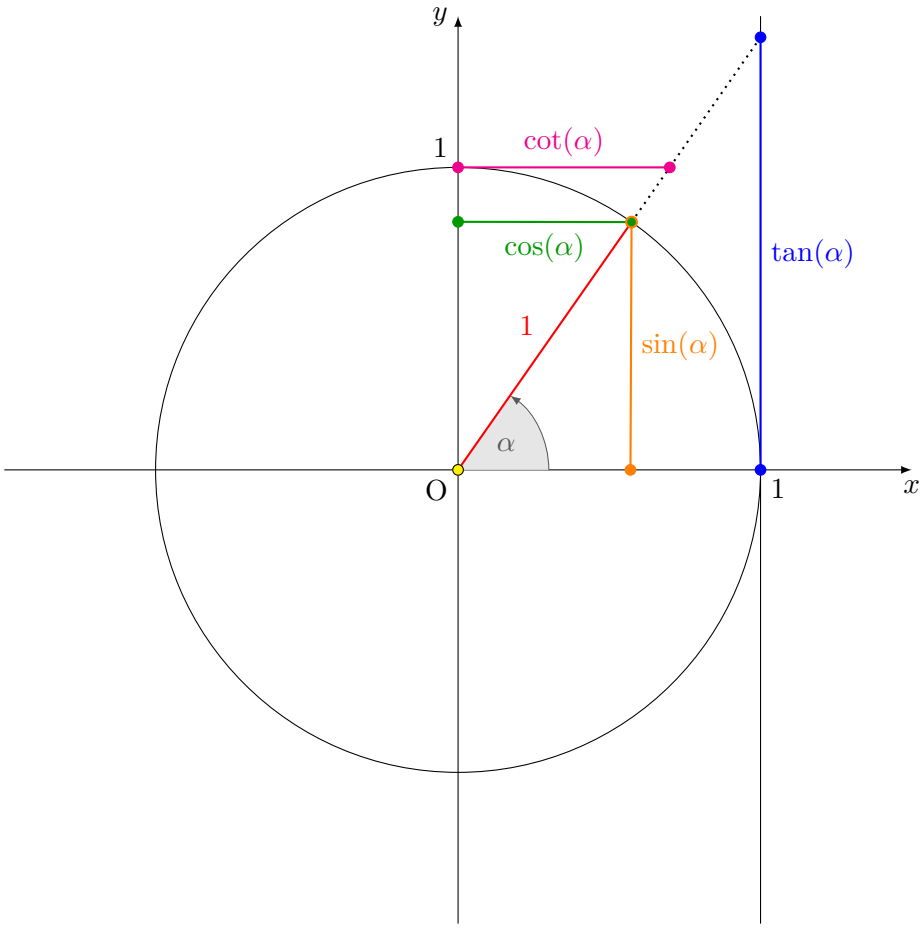
heißt Nebenzweig von arccos.
Analog gibt es Nebenzweige zu sin, cot und tan.

12.23 Beispiel

Beweisen Sie

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall\, x \in [-1,1]$$

12.24 Geometrische Interpretation von Tangens und Cotangens



Anhang A Abbilungen – Definitionen und Sätze

A.1 Definitionen

X, Y seien nichtleere Mengen.

(a) Eine **Abbildung** f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ in eindeutiger Weise ein Element $y \in Y$ zuordnet; man schreibt $y = f(x)$.
Schreibweise für Abbildungen:

$$f\colon X \longrightarrow Y \ , \ x \longmapsto f(x)$$

(b) $f\colon X \longrightarrow Y$ sei eine Abbildung. Dann heißt $\mathrm{Gr}(f) := \Big\{ (x, f(x)) \ \Big| \ x \in X \Big\} \subset X \times Y$ der **Graph** von f.
$(X \times Y) = \Big\{ (x, y) \ \Big| \ x \in X, y \in Y \Big\}$ heißt **Kreuzprodukt** von X und Y.

(c) $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon X \longrightarrow Y$ seien Abbildungen.
Dann ist $f = g \ :\Longleftrightarrow \ f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in X$.

(d) $f\colon X \longrightarrow Y$ sei eine Abbildung, $A \subset X$, $B \subset Y$. Dann heißt

$$f(A) := \Big\{ f(x) \in Y \ \Big| \ x \in A \Big\} = \Big\{ y \in Y \ \Big| \ \exists\, x \in A \text{ mit } y = f(x) \Big\} \subset Y$$

das **Bild** von A und

$$f^{-1}(B) := \Big\{ x \in X \ \Big| \ f(x) \in B \Big\} \subset X$$

das **Urbild** von B.
Bemerkung: f^{-1} ist hier KEINE Abbildung!

(e) Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt

- **injektiv** $:\Longleftrightarrow \ (x_1, x_2 \in X \text{ und } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$
- **surjektiv** $:\Longleftrightarrow \ f(X) = Y \iff$ (Zu jedem $y \in Y$ $\exists\, x \in X$ mit $f(x) = y$)
- **bijektiv** $:\Longleftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv.

(f) Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine bijektive Abbildung, so gibt es[4] zu jedem $y \in Y$ genau ein[5] $x \in X$ mit $f(x) = y$.

$$f^{-1}\colon Y \longrightarrow X \ , \ y \longmapsto x = f^{-1}(y) := f^{-1}\left(\{y\}\right)^{6}$$

heißt **Umkehrabbildung**[7] zu f.

(g) W, Z seien weitere nichtleere Mengen. Für 2 Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon W \longrightarrow Z$ mit $f(X) \subset W$ ist

$$(g \circ f)\colon X \longrightarrow Z \ , \ x \longmapsto (g \circ f)(x =:= g\big(f(x)\big)$$

[4] „gibt es“ wegen f surjektiv
[5] „genau ein“ wegen f injektiv
[6] Urbild von $\{y\}$ enthält nur ein Element $x \in X$
[7] f^{-1} ist ebenfalls bijektiv und $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ für $A \subset X$

wieder eine Abbildung und heißt **Kompositum** (oder Zusammensetzung) von f und g.

(h) Sei $D \subset \mathbb{R}$. Zu 2 Abbildungen $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erhält man folgende Abbildungen (durch „punktweise Definition“)

$$\begin{aligned}
&\lambda f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)\\
&f+g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (f+g)(x) := f(x)+g(x)\\
&f-g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (f-g)(x) := f(x)-g(x)\\
&f\cdot g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)
\end{aligned}$$

Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so erhält man die Funktion

$$\frac{f}{g}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

A.2 Beispiele

(a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto f(x) = x^2$
f ist NICHT injetiv, denn z. B. $f(-2) = 4 = f(2)$.
f ist NICHT surjektiv, denn $f(\mathbb{R}) = [0,\infty) \subsetneq \mathbb{R}$.

(b) $f\colon [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[\ ,\ x \longmapsto f(x) = x^2$
f ist bijektiv, $f^{-1}\colon [0,\infty \longrightarrow [0,\infty[\ ,\ x \longmapsto \sqrt{x}$ st die Umkehrabbildung zu f.

(c) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x+2\ ;\ g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x^2$
$(g\circ f)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = (x+2)^2 = x^2+4x+4$
$(f\circ g)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = x^2+2$

▽ Die Komposition von Abbildungen ist NICHT kommutativ! D. h. i. A. gilt NICHT $g\circ f = f\circ g$!

(d) $f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto x-2\ ;\ g\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \ln(x)$[8]
$(f\circ g)\colon (0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto (f\circ g)(x) = f\big(\big(g(x)\big) = \ln(x)-2$
$(g\circ f)\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist NICHT definiert, denn

$$f(\mathbb{R}) =]-2,\infty[\not\subseteq]0,\infty[$$

[8] der ln wird später definiert

Stichwortverzeichnis

A

Abbildung 88
    bijektive 88
    injektive 88
    surjektive 88
Axiomensystem 10

B

Betrag 15, 22
Bild 88
Binomialkoeffizient 4
Bruch
    adischer 60

C

Cauchy-Folge 45
Cauchy-Produkt 76
Cotangens 85

D

divergent 31

E

ε-Umgebung 31
Eulersche Formel 83
Eulersche Zahl 44
Exponentialfunktion
    allgemeine 79

F

Fixpunkt 68
Folge
    bestimmt divergent 41
    monotone 36
Funktion
    gleichmäßig stetige 70
    linksseitig stetige 74
    rechtsseitig stetige 74
    stetige 63

G

Gauß-Klammer 74
Graph 88
Grenzwert 30

H

Häufungspunkt 43, 71

I

Infimum 17
Intervallschachtelung 44

K

Kompositum 89
konvergiert 30
Kreuzprodukt 88

L

Logarithmusfunktion
    allgemeine 80

M

Majorante
    konvergente 53
maximales Element 16
Maximum 15
Menge
    induktiv 18
minimales Element 16
Minimum 15
Minorante
    divergente 53
monotn wachsend 36
monoton fallend 36, 69
monoton wachsend 69

N

Nachfolgermenge 18
natürlicher Logarithmus 79

Nullfolge 31

P

Partialsumme 46

R

Reihe
    absolut konvergente 52
    unendliche 46

S

Schranke
    obere 16
    untere 16
streng monoton fallend 69
streng monoton wachsend 69
Supremum 16

T

Tangens 85
Teilfolge 42

U

Umkehrabbildung 88
Urbild 88