

Staatsexamen Analysis

(Lehramt, nicht-vertieft)

Frühjahr 2015

Julian Palme

(Stand: 12. Februar 2015)

Inhaltsverzeichnis

I	Folgen und Grenzwerte	9
1.1	Folge <small>(Def)</small>	9
1.2	Folgenkonvergenz <small>(Def)</small>	9
1.3	Folgenkonvergenz <small>(Def)</small>	9
1.4	Uneigentlich konvergent, bestimmt divergent <small>(Def)</small>	9
1.5	Beschränktheit einer Folge <small>(Def)</small>	9
1.6	Monotonie von Folgen <small>(Def)</small>	9
1.7	Teilfolge <small>(Def)</small>	10
1.8	Häufungspunkt <small>(Def)</small>	10
1.9	Cauchy-Folge <small>(Def)</small>	10
1.10	Limes superior und Limes inferior <small>(Def)</small>	10
1.11	Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge <small>(Satz)</small>	10
1.12	Beschränktheit konvergenter Folgen <small>(Satz)</small>	10
1.13	Grenzwertsätze <small>(Satz)</small>	10
1.14	Vielfache konvergenter Folgen <small>(Satz)</small>	11
1.15	Satz von Bolzano-Weierstraß <small>(Satz)</small>	11
1.16	Konvergenz monotoner Folgen <small>(Satz)</small>	11
1.17	Monotone Folgen <small>(Satz)</small>	11
1.18	Cauchy-Folge <small>(Satz)</small>	11
1.19	Konvergenz einer reellen Folge <small>(Satz)</small>	11
1.20	Grenzwert einer Funktion <small>(Def)</small>	11
1.21	Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert <small>(Def)</small>	12
1.22	Stetigkeit (mit Folgen definiert) <small>(Def)</small>	12
1.23	Stetigkeit (mit $\varepsilon - \delta$ definiert) <small>(Def)</small>	12
1.24	Gleichmäßige Stetigkeit <small>(Def)</small>	12
1.25	Stetigkeit <small>(Bem)</small>	12
1.26	Stetigkeit und Stammfunktion <small>(Bem)</small>	12
1.27	Lipschitz-Stetigkeit <small>(Def)</small>	13
1.28	Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig <small>(Satz)</small>	13
1.29	Verkettung stetiger Funktionen ist stetig <small>(Satz)</small>	13
1.30	Zwischenwertsatz <small>(Satz)</small>	13
1.31	Zwischenwertsatz (alternative Formulierung) <small>(Satz)</small>	13
1.32	Zwischenwertsatz <small>(Kor)</small>	13
1.33	Jede gleichmäßig stetige Funktion ist punktwise stetig <small>(Satz)</small>	13
1.34	Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig <small>(Satz)</small>	13
1.35	lipschitz-stetig <small>(Satz)</small>	13
1.36	konvergente Folge <small>(Bem)</small>	14
1.37	Konvergenz <small>(Bem)</small>	14
1.38	konvergent gegen Null <small>(Bem)</small>	14
1.39	konvergent gegen einen Wert <small>(Bem)</small>	14
1.40	Schrankenlemma, Sandwich-Lemma <small>(Bem)</small>	14
1.41	Supremum und Maximum <small>(Bem)</small>	14
1.42	Monotoniekriterium <small>(Bem)</small>	14
II	Reihen	15
2.1	Reihe <small>(Def)</small>	15
2.2	Absolut konvergent <small>(Def)</small>	15
2.3	Exponentialreihe <small>(Def)</small>	15
2.4	Eulersche Zahl <small>(Def)</small>	15
2.5	Exponentialfunktion <small>(Def)</small>	15
2.6	Sinus und Kosinus <small>(Def)</small>	15

Literatur

[Heu09] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Wiesbaden : Vieweg und Teubner, 2009.

[Kul14] KULLA, S.: *Aufgabensammlung Mathematik: Geometrische Summenformel*. 2014. – Zugriff am 22.01.2015 unter http://de.m.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Geometrische_Summenformel

[MK11] MODLER, F. ; KREH, M.: *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2011.

[MK12] MODLER, F. ; KREH, M.: *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2012.

[Sac15] SACHER, R.: *Examenskurs Analysis, linear Algebra und analytische Geometrie (LG, LH, LR)*. Regensburg, 2014/2015.

[Wit01] WITTSTOCK, G.: *Vorlesungsskript zu Analysis 1 Wintersemester 2000-2001*. Saarbrücken, 2001. – Zugriff am 05.02.2015 unter <http://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/ws00/analysis1/Vorlesung/node57.html>

2.7	Trivalkriterium <small>(Satz)</small>	15
2.8	Konvergenzkriterium nach Cauchy <small>(Satz)</small>	16
2.9	Leibniz-Konvergenzkriterium <small>(Satz)</small>	16
2.10	Majoranten- und Minorantenkriterium <small>(Satz)</small>	16
2.11	Quotientenkriterium <small>(Satz)</small>	16
2.12	Wurzelkriterium <small>(Satz)</small>	16
2.13	Integralvergleichskriterium <small>(Satz)</small>	16
2.14	Vergleichskriterium <small>(Satz)</small>	17
2.15	Summe konvergenter Folgen <small>(Satz)</small>	17
2.16	Konvergenz der Exponentialreihe <small>(Satz)</small>	17
2.17	Cauchy-Produkt <small>(Satz)</small>	17
2.18	Funktionalgleichung der Exponentialfunktion <small>(Satz)</small>	17
2.19	Eigenschaften der Exponentialfunktion <small>(Satz)</small>	17
2.20	Logarithmusfunktion <small>(Satz)</small>	18
2.21	Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion <small>(Satz)</small>	18
2.22	Additionstheorem der Tangens-Funktion <small>(Satz)</small>	18
2.23	geometrische Reihe <small>(Bem)</small>	18
2.24	geometrische Summenformel <small>(Bem)</small>	18
2.25	Konvergenz <small>(Bem)</small>	18
2.26	Die harmonische Reihe	19
2.27	Die alternierende harmonische Reihe	19
2.28	Konvergenz und Grenzwert <small>(Bem)</small>	19
2.29	Nullfolge <small>(Bem)</small>	19
2.30	absolut konvergent <small>(Bem)</small>	19
2.31	Wurzelkriterium <small>(Kor)</small>	19
2.32	Konvergenz gegen e <small>(Bem)</small>	19
III	Funktionen einer Veränderlichen	20
3.1	Differenzierbarkeit <small>(Def)</small>	20
3.2	Differenzenquotient <small>(Def)</small>	20
3.3	Höhere Ableitungen <small>(Def)</small>	20
3.4	Extrempunkt <small>(Def)</small>	21
3.5	Kritischer Punkt <small>(Def)</small>	21
3.6	Wendepunkte <small>(Def)</small>	21
3.7	Jede differenzierbare Funktion ist stetig <small>(Satz)</small>	21
3.8	Ableitungsregeln <small>(Satz)</small>	21
3.9	Ableitung der Umkehrfunktion <small>(Satz)</small>	22
3.10	Notwendige Bedingung für Extrempunkt <small>(Satz)</small>	22
3.11	Satz von Rolle <small>(Satz)</small>	22
3.12	Terrassenpunkt <small>(Bem)</small>	22
3.13	Monotonie <small>(Satz)</small>	22
3.14	Isoliertes lokales Maximum/Minimum <small>(Satz)</small>	22
3.15	Regeln von L'Hospital <small>(Satz)</small>	22
3.16	Treppenfunktion <small>(Def)</small>	23
3.17	Integral <small>(Def)</small>	23
3.18	Ober- und Unterintegral <small>(Def)</small>	23
3.19	Riemann-Integral <small>(Def)</small>	23
3.20	Unbestimmtes Integral <small>(Def)</small>	24
3.21	Stammfunktion <small>(Def)</small>	24
3.22	Uneigentliche Integrale <small>(Def)</small>	24
3.23	Treppenfunktion <small>(Satz)</small>	25
3.24	Linearität des Integrals <small>(Satz)</small>	25
3.25	Differenzierbarkeit des unbestimmten Integrals <small>(Satz)</small>	25
3.26	Riemann-integrierbar <small>(Satz)</small>	25

3.27	Stetige Funktionen	(Satz)	26
3.28	Beschränkte und monotone Funktionen	(Satz)	26
3.29	Hauptsatz der Differential und Integralrechnung	(Satz)	26
3.30	Partielle Integration	(Satz)	26
3.31	Substitutionsregel	(Satz)	26
3.32	Partialbruchzerlegung	(Satz)	26
3.32.1	Nennerpolynom besitzt eine einfache Nullstelle (Beispiel)		26
3.32.2	Nennerpolynom besitzt eine doppelte Nullstelle (Beispiel)		27
3.32.3	Nennerpolynom besitzt eine komplexe Nullstelle (Beispiel)		27
3.33	Arkustangens		28
3.34	Satz vom Maximum		28
3.34.1	Beschränktheits-Lemma	(Lemma)	28
3.34.2	Satz vom Maximum	(Satz)	28
3.34.3	Satz von Weierstraß	(Satz)	28
3.34.4	Stetiges Bild eines kompakten Intervalls	(Kor)	28
IV	Mittelwertsatz und Taylorformel		29
4.1	Taylorreihe	(Def)	29
4.2	Restglied	(Def)	29
4.3	Mittelwertsatz der Differentialrechnung	(Satz)	29
4.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung	(Satz)	29
4.5	Mittelwertsatz	(Kor)	29
4.6	Taylorformel	(Satz)	30
V	Potenzreihen		30
5.1	Potenzreihe	(Def)	30
5.2	Konvergenzradius einer Potenzreihe	(Def)	30
5.3	Formeln von Cauchy-Hadamard und Euler	(Satz)	30
5.4	Ableitung einer Potenzreihe	(Satz)	31
5.5	Differenzierbarkeit von Potenzreihen		31
5.6	Berechnung des Konvergenzradius		31
5.7	Konvergenzradius	(Bem)	31
VI	Kurven und Funktionen mehrerer Veränderlicher		32
A	Metrische und topologische Räume		32
6.1	Metrik	(Def)	32
6.2	offene, abgeschlossene Kugel	(Def)	32
6.3	Umgebung	(Def)	33
6.4	offene Menge	(Def)	33
6.5	abgeschlossene Menge	(Def)	33
6.6	Rand	(Def)	33
6.7	Inneres	(Def)	33
6.8	Abschluss	(Def)	33
6.9	offene Überdeckung	(Def)	33
6.10	überdeckungskompakt	(Def)	33
6.11	beschränkt	(Def)	34
6.12	Kompaktheit	(Def)	34
6.13	topologischer Raum	(Def)	34
6.14	offene Teilmenge	(Def)	34
6.15	abgeschlossene Teilmenge	(Def)	34
6.16	Umgebung	(Def)	34
6.17	zusammenhängend	(Def)	34
6.18	Norm	(Def)	34

L	harmonische	19
	Restglied	29
	Integraldarstellung	29
	Lagrange	29
	Richtungsableitung	39
	Riemann-Integral	24
	riemann-integrierbar	23
S		
	Sinusfunktion	15
	Spur	42
	Stammfunktion	24
	stetig	12, 37
	gleichmäßig	12
	lipschitz-	13, 37
	Summenregel	21
T		
	abgeschlossene	33
	offene	33
	Metrik	32
	Minimum	21
N		
	Norm	34
	Normalenfeld	43
	Nullraum	47
O		
	Oberintegral	23
	offene Überdeckung	33
P		
	Parametertransformation	41
	Potenzreihe	30
	Produktregel/Leibnizregel	21
Q		
	Quotientenregel	21
R		
	Rand	33
	Randpunkt	33
	Reihe	15
	geometrische	18
U		
	überdeckungskompakt	33
	Umgebung	33
	Umparametrisierung	42
	Unterintegral	23
W		
	Wronski-Determinante	48

Stichwortverzeichnis

A	
Ableitung	20, 38
Abschluss	11, 33
Anfangswertaufgabe	47
B	
Banach-Raum	35
C	
Cauchy-Folge	10
charakteristisches Polynom	51
D	
Differential	38
Differentialgleichung	
autonome	46
explizite	46
gewöhnliche	46
homogene	46
implizite	46
inhomogene	46
Differenzenquotient	20
differenzierbar	20, 38
partiell	39
E	
Entwicklungspunkt	30
ε -Umgebung	33
Eulersche Zahl	15
Exponentialfunktion	15
Exponentialreihe	15
Extremum	21
Extremwerte	45
F	
Fixpunkt	37
Folge	9
divergent	9
unendliche	9
folgenstetig	37
Formel von Cauchy-Hadamard	30

Fundamentalsystem	47
G	
Gradient	39
Grenzwert	11
linksseitig	12
rechtsseitig	12
Grenzwert der Folge	9
H	
Häufungspunkt	10
Hesse-Matrix	44
I	
Inneres	33
Integral	23
unbestimmtes	24
uneigentliches	24
J	
Jacobi-Matrix	39
K	
Kettenregel	21
Koeffizienten	30
Kontraktion	37
Konvergenzintervall	30
Konvergenzradius	30
Kosinusfunktion	15
Krümmung	43
kritischer Punkt	21
Kugel	32
Kurve	
einfach geschlossen	43
geschlossen	43
nach Bogenlänge parametrisierte	42
orientierte	42
parametrisierte	41
periodische	43
regulär parametrisierte	41
rektifizierbar	42

6.19	Normenäquivalenz	(Def)	35
6.20	Banachraum	(Def)	35
6.21	Exponentialfunktion linearer Abbildungen	(Def)	35
6.22	Durchschnitt offener Mengen	(Satz)	35
6.23	Vereinigung offener Mengen	(Satz)	35
6.24	Vereinigung abgeschlossener Mengen	(Satz)	35
6.25	Durchschnitt abgeschlossener Mengen	(Satz)	35
6.26	hausdorffsche Trennungseigenschaft	(Satz)	35
6.27	endliche Teilmenge	(Satz)	35
6.28	Rand, Abschluss und Inneres	(Satz)	36
6.29	Heine-Borel	(Satz)	36
6.30	Kompaktheit	(Satz)	36
6.31	Kompaktheit mit Standardmetrik	(Satz)	36
6.32	Metrik auf einem normierten Vektorraum	(Satz)	36
B	Stetige Abbildungen		36
6.33	Funktion mehrerer Veränderlicher	(Def)	36
6.34	Grenzwert einer Funktion	(Def)	36
6.35	Folgestetigkeit	(Def)	37
6.36	Stetigkeit in metrischen Räumen	(Def)	37
6.37	gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen	(Def)	37
6.38	Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen	(Def)	37
6.39	Fixpunkt	(Def)	37
6.40	Kontraktion	(Def)	37
6.41	Zusammensetzung stetiger Funktionen	(Satz)	37
6.42	Stetigkeitskriterium	(Satz)	38
6.43	kompakte Menge	(Satz)	38
6.44	kompakte Teilmenge II	(Satz)	38
6.45	kompakte Teilmengen II	(Satz)	38
6.46	Banachscher Fixpunktsatz	(Satz)	38
6.47	normierte Vektorräume	(Satz)	38
C	Differenzierbare Abbildungen		38
6.48	differenzierbare Abbildung, Differential	(Def)	38
6.49	Richtungsableitung	(Def)	39
6.50	partielle Ableitung	(Def)	39
6.51	Gradient	(Def)	39
6.52	Jacobi-Matrix	(Def)	39
6.53	zweimal differenzierbar	(Def)	39
6.54	höhere Ableitung	(Def)	40
6.55	Linearität der Ableitung	(Satz)	40
6.56	Eindeutigkeit der Ableitung	(Satz)	40
6.57	differenzierbare Abbildungen sind stetig	(Satz)	40
6.58	Kettenregel	(Satz)	40
6.59	Mittelwertungleichung	(Satz)	40
6.60	Zusammenhang zwischen Differential und Richtungsableitung	(Satz)	40
6.61	stetig differenzierbar	(Satz)	40
6.62	Lemma von Schwarz	(Lemma)	41
6.63	zweimal stetig differenzierbar	(Satz)	41
D	Kurven		41
6.64	Kurve	(Def)	41
6.65	regulär parametrisiert	(Def)	41
6.66	Unparametrisierung, Parametertransformation	(Def)	41

6.67	orientierungserhaltend, orientierungsumkehrend	(Def)	42
6.68	Parametrisierung nach Bogenlänge	(Def)	42
6.69	Spur	(Def)	42
6.70	Orientierung	(Def)	42
6.71	Rektifizierbarkeit einer Kurve, Länge einer Kurve	(Def)	42
6.72	Länge der Kurve	(Def)	43
6.73	Periode, geschlossen	(Def)	43
6.74	einfach geschlossen	(Def)	43
6.75	Normalenfeld	(Def)	43
6.76	ebene Krümmung	(Def)	43
6.77	regulär parametrisiert	(Satz)	43
6.78	rektifizierbar, regulär parametrisierte Kurve	(Satz)	43
6.79	Parametrisierungen nach Bogenlänge	(Satz)	44
6.80	parametrisierte Kurve	(Satz)	44
6.81	Länge unabhängig von Wahl der Parametrisierung	(Satz)	44
6.82	Krümmung	(Satz)	44
VII	Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher		44
7.1	Hesse-Matrix	(Def)	44
7.2	lokales Extremum	(Def)	44
7.3	Definitheit	(Def)	45
7.4	notwendiges Kriterium für das Vorhandensein von Extremstellen	(Satz)	45
7.5	hinreichendes Kriterium	(Satz)	45
7.6	Extrema unter Nebenbedingungen	(Satz)	45
7.7	monoton steigende Funktion	(Satz)	46
VIII	Gewöhnliche Differentialgleichungen		46
8.1	Differentialgleichung	(Def)	46
8.2	explizit, homogen, autonom	(Def)	46
8.3	Anfangswertaufgabe	(Def)	47
8.4	Nullraum	(Def)	47
8.5	Fundamentalsystem	(Def)	47
8.6	Satz von Peano	(Satz)	47
8.7	Satz von Picard-Lindelöf	(Satz)	48
8.8	Menge aller Lösungen ist ein Vektorraum	(Satz)	48
8.9	Nullraum	(Satz)	48
8.10	Vektorraum	(Satz)	48
8.11	Wronski-Determinante	(Satz)	48
8.12	Fundamentalsystem	(Satz)	49
8.13	Lösung der homogenen Gleichung	(Satz)	49
8.14	Lösung der inhomogenen Gleichung	(Satz)	49
8.15	Lösungsverfahren		49
8.15.1	Separation der Variablen		49
8.15.2	Variation der Konstanten		49
8.16	Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung	(Def)	50
8.17	Menge aller Lösungen L	(Satz)	50
8.18	Nullfunktion als Lösung	(Satz)	51
8.19	Homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	(Def)	51
8.20	Menge aller Lösungen L_h	(Satz)	51
8.21	Übersicht über homogene lineare Differentialgleichungen		51
8.21.1	Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung		51
8.21.2	Homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung		52
8.22	Inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	(Def)	52

8.29 Lösung einer Differentialgleichung mit einer Hilfsgleichung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}^+$ ein Intervall. Dann gelten:

(1) Ist $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$y' = y^3 - \frac{y}{x}, \quad x > 0$$

mit $y(x) > 0 \quad \forall x \in I$, so ist

$$z: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$$

eine Lösung von

$$z' = \frac{2}{x} \cdot z - 2$$

mit $z(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

(2) Ist $z: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von

$$z' = \frac{2}{x} \cdot z - 2$$

mit $z(x) > 0 \quad \forall x \in I$, so ist

$$y: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}}$$

eine Lösung von

$$y' = y^3 - \frac{y}{x}$$

mit $y(x) > 0 \quad \forall x \in I$.

Seien $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sei Lösung von

$$(D) \quad y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$$

Dann gilt für eine differenzierbare Funktion $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h \cdot \varphi \text{ Lösung von } (D) \iff h'' \cdot \varphi + h'(2\varphi' + f\varphi) = 0$$

8.27 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $(x_0, y_0) \in U \times V$ und φ und ψ Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(x)g(y) \text{ , } (x, y) \in U \times V$$

über einem Intervall I , so gilt:

Ist $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, so ist $\varphi(x) = \psi(x) \ \forall x \in I$.

Bemerkung: Der Eindeutigkeitssatz gilt insbesondere, wenn g stetig differenzierbar ist.

8.28 Differentialgleichungssystem

Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem (DGS)

$$(D) \begin{cases} y_1' = a_1 y_1 + a_2 y_2 \\ y_2' = b_1 y_1 + b_2 y_2 \end{cases}$$

$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt maximale Lösung von (D) , wenn gilt:

(i) φ differenzierbar

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_1'(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x)$$

$$\varphi_2'(x) = b_1 \varphi_1(x) + b_2 \varphi_2(x)$$

Es gilt: Die Menga L aller Lösungen von (D) ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt, erhält man wie folgt eine Basis von L :
Bestimme einen Eigenvektor v_λ bzw. v_μ von A zum Eigenwert λ bzw. μ . Dann bilden

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ , } x \longmapsto e^{\lambda x} v_\lambda$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ , } x \longmapsto e^{\mu x} v_\mu$$

eine Basis von L .

Die Gesamtheit der Lösungen

$$\psi(x) = c_1 e^{\lambda x} v_\lambda + c_2 e^{\mu x} v_\mu$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ stellt die allgemeine Lösung von (D) dar.

8.23	Eindeutigkeitssatz (Satz)	52
8.24	Menge aller Lösungen L (Satz)	53
8.25	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen (Def)	53
8.26	Lösungsskizze zu Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	54
8.27	Eindeutigkeitssatz (Satz)	55
8.28	Differentialgleichungssystem	55
8.29	Lösung einer Differentialgleichung mit einer Hilfsgleichung	56

Stichwortverzeichnis

Literatur

I Folgen und Grenzwerte

1.1 Definition (Folge)

Unter einer endlichen Folge verstehen wir eine Abbildung $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow M$ und unter einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ allgemein eine Abbildung von der Menge der Natürlichen Zahlen \mathbb{N} in eine Menge M , also eine Abbildung der Form $\mathbb{N} \rightarrow M$.

1.2 Definition (Folgenkonvergenz)

Eine Folge a_n heißt konvergent, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Hierbei bezeichnet a den Grenzwert der Folge, das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$$

Ist eine Folge NICHT konvergent, so nennt man sie divergent.

1.3 Definition (Folgenkonvergenz)

Diese Definition ist äquivalent zu 1.2.

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt gegen a , wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, für welche die Folge $(|a_n - a|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, das heißt, für die $|a_n - a| \rightarrow 0$ gilt.

1.4 Definition (Uneigentlich konvergent, bestimmt divergent)

Falls es zu jedem $A \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt $a_n > A \quad \forall n \geq n_0$, dann sagen wir, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert uneigentlich (oder ist bestimmt divergent) gegen Unendlich und schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \infty$.
Analog schreiben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = -\infty$, wenn es zu jedem $m \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n < m \quad \forall n \geq n_0$.

1.5 Definition (Beschränktheit einer Folge)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben, als auch nach unten beschränkt ist.

1.6 Definition (Monotonie von Folgen)

Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \leq a_{n+1}$. Sie heißt streng monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n < a_{n+1}$.
Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \geq a_{n+1}$. Sie heißt streng monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n > a_{n+1}$.

(ii) $\forall x \in I$ ist $\varphi(x) \in V$ und $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$

(iii) $\varphi(x_0) = y_0$

Lösung, wenn g KEINE Nullstelle hat:

Berechne für $x \in U$: $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ und für $y \in V$: $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds$.

Ist $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (A), so ist

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad \forall x \in I$$

Das geht natürlich nur dann, wenn $F(x) \in G(V) \quad \forall x \in I$ gilt. Das maximale Definitionsintervall I mit $x_0 \in I \subseteq U$ und $F(x) \in G(V) \quad \forall x \in I$.

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \stackrel{(1)}{=} \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} dt \stackrel{(2)}{=} \int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(s)} ds = G(\varphi(x))$$

(1) $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x)) \implies f(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}$

(2) $s = \varphi(t) \implies \frac{ds}{dt} = \varphi'(t) \implies ds = \varphi'(t) dt$ und $\varphi(x_0) = y_0$

8.26 Lösungsskizze zu Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Sei $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $(x_0, y_0) \in U \times V$.

$$(A) \begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (x, y) \in U \times V$$

Sei $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in V$.

Berechne

(1) $F: U \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$

(2) $G: V \rightarrow \mathbb{R}, G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds$

(3) $G(V)$

(4) größtes Intervall I mit $x_0 \in I \subseteq U$ und $F(x) \in G(V) \quad \forall x \in I$.

Dann ist die Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = G(\varphi(x)) \quad \forall x \in I$$

die Lösung von (A) mit maximalem Definitionsintervall.

Es gilt aber der Eindeutigkeitssatz:

Sind $\varphi, \psi: J \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (D) über einem Intervall J , so gilt:

Ist

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0)$$

$$\varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$$

:

$$\varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0)$$

für ein $x_0 \in J$, so ist

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in J$$

8.24 Satz (Menge aller Lösungen L)

Die Menge aller Lösungen von (D) ist ein n -dimensionaler Unterraum von $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$.

$$L_h := \left\{ \varphi \left| \varphi \text{ Lösung von } y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \right. \right\}$$

ist sein Richtungsraum.

L_h bestimmt man wie in 8.21.2. Noch zu bestimmen ist irgendeine Lösung ψ_p von (D) .

Wenn $f(x)$ (aus 8.22) die Form

$$f(x) = (c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m) \cdot e^{\alpha x} \cdot \begin{cases} \cos(\beta x) \\ \sin(\beta x) \end{cases}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $c_0, c_1, \dots, c_m, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ hat, so erhält man ein ψ_p in folgender Form:

$$\psi_p(x) = \begin{cases} (A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m)e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ x^l \cdot [(A_0 + A_1x + \dots + A_mx^m)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m)e^{\alpha x} \sin(\beta x)] \end{cases}$$

(alles reell), wenn $\alpha + i\beta$ KEINE Nullstelle von p ist.

, wenn $\alpha + i\beta$ l -fache Nullstelle von p ist.

wobei $A_0, \dots, A_m, B_0, \dots, B_m \in \mathbb{R}$.

8.25 Definition (Differentialgleichungen mit getrennten Variablen)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $(x_0, y_0) \in U \times V$

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$(A) \quad \begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (x, y) \in U \times V$$

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung von (A) über einem Intervall I mit $x_0 \in I$, wenn gilt:

- (i) φ differenzierbar

1.7 Definition (Teilfolge)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung, das heißt, es gelte $\Phi(m) > \varphi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$.

Dann nennen wir die Folge $(a_{\Phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. In den meisten Fällen setzen wir $n_k := \Phi(k)$ und schreiben $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

1.8 Definition (Häufungspunkt)

Eine reelle Zahl x heißt Häufungspunkt einer reellen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.

1.9 Definition (Cauchy-Folge)

Eine Folge reelle Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$$

1.10 Definition (Limes superior und Limes inferior)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge.

- (1) Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und $H(a_n) \neq \emptyset$, so nennen wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup H(a_n)$$

den Limes superior.

- (2) Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt und $H(a_n) \neq \emptyset$, so nennen wir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf H(a_n)$$

den Limes inferior.

1.11 Satz (Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge)

Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

1.12 Satz (Beschränktheit konvergenter Folgen)

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

1.13 Satz (Grenzwertsätze)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$.
Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a + b$
- (2) Folge $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a - b$
- (3) Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a \cdot b$

- (4) Ist zusätzlich $b \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \ \forall n \geq m$, und für die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}}$ gilt: Sie konvergiert und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)} = \frac{a}{b}$$

1.14 Satz (Vielfache konvergenter Folgen)

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

1.15 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge, das heißt mindestens einen Häufungspunkt.

1.16 Satz (Konvergenz monotoner Folgen)

Eine monoton wachsende (fallende) Folge reeller Zahlen ist genau konvergent, wenn sie nach oben (unten) beschränkt ist.

1.17 Satz (Monotone Folgen)

Für monoton wachsende reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt stets:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \sup \left\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

Für monoton fallende reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt stets:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \inf \left\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

1.18 Satz (Cauchy-Folge)

Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

1.19 Satz (Konvergenz einer reellen Folge)

Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

1.20 Definition (Grenzwert einer Funktion)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen

$$\bar{D} := \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in D \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right\}$$

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und nennen dies den **Grenzwert** der Funktion. Hierbei ist $c \in \mathbb{R}$ und $a \in D$. \bar{D} nennen wir den **Abschluss** von D .

8.2.1.2 Homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (D_h) \ y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= 0 \\ p(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \end{aligned}$$

Es gilt: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ l -fache Nullstelle von p , so sind die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{\lambda x} \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto x^{l-1} e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Lösungen von (D_h) .

Ist $\alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle von p , so sind die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{aligned}$$

Lösungen von (D_h) .

8.2.2 Definition (Inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\neq 0$. Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(D) \ y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x), \ x \in I$$

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (maximale) Lösung von (D) , wenn gilt:

- (i) φ ist n -mal differenzierbar
- (ii) $\forall x \in I$ ist $\varphi^{(n)}(x) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\varphi'(x) + a_0\varphi(x) = f(x)$

8.2.3 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(D) \ y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = g(x), \ x \in I$$

Es gilt: Die Menge L aller Lösungen von (D) ist ein n -dimensionaler Unterraum aller $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$. Die Menge der Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist sein Richtungsraum.

HIER GIBT ES KEINE UNIVERSELLE LÖSUNGSSTRATEGIE!!

Differentialgleichung

$$(D_h) \ y' = f(x)y \quad , \ (x,y) \in I \times \mathbb{R}$$

L erhält man also, indem man alle Lösungen von (D_h) und eine Lösung ψ_p von (D) bestimmt. Die Funktion $\psi_p + \varphi$ sind dann die Lösungen von (D) , wobei φ die Lösungen von D_h darstellen.

8.18 Satz (Nullfunktion als Lösung)

Die einzige Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung, die eine Nullstelle besitzt, ist die Nullfunktion.

8.19 Definition (Homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung)

Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(D_h) \ y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (maximale) Lösung von (D_h) , wenn gilt:

- (i) φ ist n -mal differenzierbar
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ ist $\varphi^{(n)}(x) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\varphi'(x) + a_0\varphi(x) = 0$

8.20 Satz (Menge aller Lösungen L_h)

Die Menge aller Lösungen L_h von (D_h) ist ein n -dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R} -Vektorraums aller $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Eine Basis von L_h nennt man auch ein Lösungsfundamentalsystem für (D_h) .

Die zentrale Rolle bei der Bestimmung von L_h bzw. so einer Basis spielt das Polynom

$$p(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$$

Man nennt es das charakteristische Polynom für (D_h) .

8.21 Übersicht über homogene lineare Differentialgleichungen

8.21.1 Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sei.

$$(D) \ y' = f(x)y + g(x)$$

$$(D_h) \ y' = f(x)y$$

Bestimme

$$F: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } F' = f$$

$$u: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u'(x) = g(x)e^{-F(x)} \forall x \in I$$

Die $\psi_c: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_c(x) = u(x)e^{F(x)} + ce^{F(x)}$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen von (D) .

1.21 Definition (Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert)

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n > a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, so schreiben wir $\lim_{x \searrow a} f(x) = c$ und nennen dies den rechtsseitigen Grenzwert.

Analog bedeutet $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$, dass für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n < a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Wir nenne die dann den linksseitigen Grenzwert.

In dieser Definition bedeutet $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = c$, dass für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Analog ist $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = c$ definiert.

1.22 Definition (Stetigkeit (mit Folgen definiert))

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist.

f heißt (punktweise) stetig in D , falls die Funktion in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Ist eine Funktion NICHT stetig, so nennt man sie unstetig.

1.23 Definition (Stetigkeit (mit $\varepsilon - \delta$ definiert))

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

Kürzer kann man schreiben:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

NICHT-Stetigkeit bedeutet gerade die Negation, also

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in D: (|x - x_0| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)$$

1.24 Definition (Gleichmäßige Stetigkeit)

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig in D , wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D: (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

Die Negation lautet

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in D: (|x - y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)$$

1.25 Bemerkung (Stetigkeit)

In 1.23 und 1.24 kann man statt „ $< \varepsilon$ “ auch „ $\leq \varepsilon$ “ benutzen.

1.26 Bemerkung (Stetigkeit und Stammfunktion)

Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion.

1.27 Definition (Lipschitz-Stetigkeit)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt f in D lipschitz-stetig, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in D$$

mit einer Konstanten $L > 0$. Dies ist die sogenannte Lipschitz-Konstante.

1.28 Satz (Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind stetig)

Seien f und g zwei Funktionen mit $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, die in $x_0 \in D$ stetig sind und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig. Gilt zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}: D_{g \neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $D_{g \neq 0} := \left\{ x \in D \mid g(x) \neq 0 \right\}$.

1.29 Satz (Verkettung stetiger Funktionen ist stetig)

Seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei $f(D) \subset E$. Ist f in $x_0 \in D$ stetig und ist g in $y_0 := f(x_0)$ stetig, so ist die Funktion $g \circ f$ in x_0 stetig.

1.30 Satz (Zwischenwertsatz)

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

1.31 Satz (Zwischenwertsatz (alternative Formulierung))

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist jede Zahl, die zwischen Funktionswerten liegt, selbst Funktionswert von f .

1.32 Korollar (Zwischenwertsatz)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$.

1.33 Satz (Jede gleichmäßig stetige Funktion ist punktwise stetig)

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig in D , so ist sie dort auch punktwise stetig. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist also punktwise stetig.

1.34 Satz (Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig)

Gegeben sei eine auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f dort auch gleichmäßig stetig.

1.35 Satz (lipschitz-stetig)

Jede lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Alternative nach [Sacl5]:

Bestimme zunächst eine Stammfunktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (existiert, da f stetig).

Alle Lösungen von (D_h) : $\varphi_c: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_c(x) = ce^{F(x)}$ mit $c \in \mathbb{R}$

Eine Lösung ψ_p von (D) : Bestimme eine differenzierbare Funktion $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\psi_p: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_p(x) = u(x)e^{F(x)}$ eine Lösung von (D) ist.

ψ_p Lösung von $(D) \iff$

$$\text{Für jedes } x \in I \text{ ist } \psi_p'(x) = f(x)\psi_p(x) + g(x) \iff$$

$$\text{Für jedes } x \in I \text{ ist } u'(x)e^{F(x)} + u(x)e^{F(x)}f(x) = f(x)u(x)e^{F(x)} + g(x) \iff$$

$$\text{Für jedes } x \in I \text{ ist } u'(x) = g(x)e^{-F(x)}$$

Ist daher $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion

$$I \rightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x)e^{-F(x)}$$

so ist

$$\psi_p: I \rightarrow \mathbb{R}, \psi_p(x) = u(x)e^{F(x)}$$

eine Lösung von (D) und die Funktionen

$$\psi: I \rightarrow \mathbb{R}, \psi(x) = u(x)e^{F(x)} + ce^{F(x)}, c \in \mathbb{R}$$

sind die Lösungen von (D) .

Man sagt dafür auch

$$\psi(x) = u(x)e^{F(x)} + ce^{F(x)}, c \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung von (D) .

8.16 Definition (Homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(D) \quad y' = f(x)y + g(x), \quad (x, y) \in I \times \mathbb{R}$$

$\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (maximale) Lösung von (D) , wenn gilt:

(i) ψ ist differenzierbar

$$(ii) \quad \forall x \in I \text{ ist } \psi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x)$$

8.17 Satz (Menge aller Lösungen L)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Die Menge L aller Lösungen von

$$(D) \quad y' = f(x)y + g(x), \quad (x, y) \in I \times \mathbb{R}$$

ist ein eindimensionaler affiner Unterraum des \mathbb{R} -Vektorraums $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$.

Sein Richtungsraum ist die Menge L_h aller Lösungen der zu (D) gehörigen homogenen linearen

8.12 Satz (Fundamentalsystem)

Φ Fundamentalsystem $\iff \left(\Phi' = A\Phi \text{ und } \det(\Phi(t)) \neq 0 \text{ für ein } t \in J \right)$

8.13 Satz (Lösung der homogenen Gleichung)

Sei Φ ein Fundamentalsystem für $x' = A(t)x$. Dann gilt:

- (i) $x(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x_0$ ist die Lösung des Anfangswertproblems $x' = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$
- (ii) matrixwertige Funktion Ψ ist weiteres Fundamentalsystem
 $\iff \exists C \in \text{Gl}_n(\mathbb{R}): \Psi(t) = \Phi(t)C$

8.14 Satz (Lösung der inhomogenen Gleichung)

Es sei Φ ein Fundamentalsystem für $x' = A(t)x$.

Dann hat das Anfangswertproblem $x' = A(t)x + f$, $x(t_0) = x_0$ die Lösung

$$x(t) = \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1} + \int_{t_0}^t (\Phi(s))^{-1} f(s) \, ds$$

8.15 Lösungsverfahren**8.15.1 Separation der Variablen**

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$x' = f(t)g(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad g(x_0) \neq 0$$

ist gegeben durch

$$\int_{t_0}^t f(s) \, ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{x'(s)}{g(x(s))} \, ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{g(y)}$$

8.15.2 Variation der Konstanten

Ist $x_0 \neq 0$, so ist eine Lösung von

$$x' + a(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

gegeben durch

$$x(t) = x_0 \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right)$$

und die von

$$x' + a(t)x = f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

durch

$$x(t) = \left[\int_{t_0}^t f(r) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^r a(s) \, ds \right) \, dr + x_0 \right] \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right)$$

1.36 Bemerkung (konvergente Folge)

Seien $c, d \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine gegen a konvergiende Folge.

$$c \leq a_n \leq d \quad \forall n \geq n_0 \implies c \leq a \leq d$$

ACHTUNG: $c < a_n < d \not\Rightarrow c < a < d$

1.37 Bemerkung (Konvergenz)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergent gegen a .

Wenn $a > 0$ ist, gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 0a$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq c \quad \forall n \geq N$.

1.38 Bemerkung (konvergent gegen Null)

Sei $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{n+l}\right)_{n \geq 1}$ gegen Null.

1.39 Bemerkung (konvergent gegen einen Wert)

Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
 $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergiert gegen $a \iff (a_{2k})_{k \geq k_0}$ und $(a_{2k+1})_{k \geq k_0}$ konvergieren gegen a

1.40 Bemerkung (Schränkenlemma, Sandwich-Lemma)

Seien $(a_n)_{n \geq n_0}$, $(b_n)_{n \geq n_0}$, $(c_n)_{n \geq n_0}$ Folgen. Es gebe ein $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_0$ mit

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_1$$

Wenn dann $(a_n)_{n \geq n_0}$ und $(b_n)_{n \geq n_0}$ gegen ein $c \in \mathbb{R}$ konvergieren, so konvergiert auch $(x_n)_{n \geq n_0}$ gegen c .

1.41 Bemerkung (Supremum und Maximum)

Sei $M \subset \mathbb{R}$ und sei $s \in \mathbb{R}$ und $g \in \mathbb{R}$.
 s ist Supremum von $M \iff$

$$(1) \quad \forall x \in M: x \leq s$$

$$(2) \quad \forall s_1 \in \mathbb{R} \text{ mit } s_1 < s \quad \exists x \in M \text{ mit } x > s_1$$

g ist Maximum von M (größtes Element von M) \iff

$$(1) \quad \forall x \in M: x \leq g$$

$$(2) \quad g \in M$$

1.42 Bemerkung (Monotoniekriterium)

- (1) Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist konvergent gegen

$$\sup \left\{ a_n \mid n \geq n_0 \right\}$$

(2) Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ ist konvergent gegen

$$\inf \left\{ a_n \mid n \geq n_0 \right\}$$

II Reihen

2.1 Definition (Reihe)

Die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen (Teilsummen) $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$ einer reellen Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heißt Reihe.

Eine Reihe heißt konvergent, wenn die Partialsummenfolge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert.

2.2 Definition (Absolut konvergent)

Eine Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$ konvergiert.

2.3 Definition (Exponentialreihe)

Unter der Exponentialreihe verstehen wir die Reihe

$$e^x := \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

2.4 Definition (Eulersche Zahl)

Die Zahl $e := e^1 = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}$ heißt Eulersche Zahl.

2.5 Definition (Exponentialfunktion)

Die Funktion $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ heißt Exponentialfunktion.

2.6 Definition (Sinus und Kosinus)

Die Sinusfunktion ist definiert als

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Entsprechend ist die Kosinusfunktion definiert als

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

2.7 Satz (Trivalkriterium)

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} = 0$

8.7 Satz (Satz von Picard-Lindelöf)

Seien $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a > 0$ und $b > 0$ und

$$D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b \right\}$$

Ist nun $f = f(t, x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ sogar Lipschitz-stetig in x mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, dann hat die Anfangswertaufgabe $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ eine eindeutige Lösung auf dem Intervall $t_0 - d, t_0 + d$, wobei $d = \min \left\{ a, \frac{b}{L}, \frac{1}{L} \right\}$.

8.8 Satz (Menge aller Lösungen ist ein Vektorraum)

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A : J \rightarrow \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stetig. Dann bildet die Menge aller Lösungen von

$$x' - A(t)x = 0$$

einen Vektorraum.

8.9 Satz (Nullraum)

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sind $f \in \mathcal{N}_A$ und $f(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in J$, so ist $f(t) = 0$ für alle t .

8.10 Satz (Vektorraum)

Es gilt

$$\dim(\mathcal{N}_A) = n$$

das heißt, die Lösungen von $x' - A(t)x = 0$ bilden einen n -dimensionalen Vektorraum.

8.11 Satz (Wronski-Determinante)

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x^1, \dots, x^n \in \mathcal{N}_A$. Sei

$$D(t) := \det \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \dots & x_1^n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante.

Dann sind äquivalent:

- (i) $D(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in J$
- (ii) $D(t) = 0 \ \forall t \in J$
- (iii) $x^1(t_0), \dots, x^n(t_0)$ sind als Vektoren im \mathbb{R}^n linear abhängig für ein $t_0 \in J$
- (iv) $x^1(t), \dots, x^n(t)$ sind als Vektoren im \mathbb{R}^n linear abhängig für alle $t \in J$
- (v) x^1, \dots, x^n sind linear abhängig als Funktionen

8.3 Definition (Anfangswertaufgabe)

Ist $x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$ eine Differentialgleichung, $t_0 \in I$, so besteht eine **Anfangswertaufgabe** im Finden einer Lösung x der Differentialgleichung, sodass außerdem die ersten $k - 1$ Ableitungen von x in t_0 die vorgegebenen Anfangswerte $x(t_0) = c_0, \dots, x^{(k-1)}(t_0) = c_{k-1}$ annehmen.

8.4 Definition (Nullraum)

Seien J ein offenes Intervall in \mathbb{R} , $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion und A eine auf J stetige matrixwertige Funktion, also eine Funktion, die jedem $t \in J$ eine Matrix aus $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ zuordnet. Dann bezeichnen wir die Menge aller Lösungen von

$$x' - A(t)x = 0$$

mit \mathcal{N}_A und nennen dies den **Nullraum** der Differentialgleichung.

8.5 Definition (Fundamentalsystem)

Seien $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und A eine stetige, matrixwertige Funktion auf J . Eine Basis $\{x^1, \dots, x^n\}$ von \mathcal{N}_A nennt man **Fundamentalsystem** für die Differentialgleichung $x' = A(t)x$. Meistens nennt man auch die Matrix

$$\Phi := \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

ein **Fundamentalsystem**.

Bemerkung: Jedes x^k ist eine Funktion von J nach \mathbb{R}^n , die wiederum aus n Komponenten x_1^k, \dots, x_n^k besteht.

8.6 Satz (Satz von Peano)

Es seien $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $b > 0$. Setze

$$D = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b \right\}$$

Ist $f = f(t, x): D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so hat die Anfangswertaufgabe

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

eine Lösung auf dem Intervall $(t_0 - c, t_0 + c)$, wobei

$$c = \min \left\{ a, \frac{b}{A} \right\} \quad \text{mit} \quad A = \max \left\{ \|f(t, x)\| \mid (t, x) \in D \right\}$$

2.8 Satz (Konvergenzkriterium nach Cauchy)

$$\sum a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m \geq n \geq n_0: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

2.9 Satz (Leibniz-Konvergenzkriterium)

Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$, und ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ (das heißt, die Folge ist eine Nullfolge), so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$.

Ferner gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k \geq n_0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k - \sum_{k \geq n_0}^k (-1)^k \cdot a_k \right| \leq a_{n+1}$$

2.10 Satz (Majoranten- und Minorantenkriterium)

Seien $\sum a_k$ und $\sum b_k$ zwei Reihen.

- (1) Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ ab einem k_0 , und ist die Majorante $\sum b_k$ konvergent, so konvergiert $\sum a_k$ absolut.
- (2) Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ ab einem k_0 , und ist die Minorante $\sum a_k$ divergent, so divergiert $\sum b_k$.

2.11 Satz (Quotientenkriterium)

Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \implies$ Reihe konvergiert absolut
- (2) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1 \implies$ Quotientenkriterium liefert KEINE Aussage über Konvergenz und Divergenz
- (3) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \implies$ Reihe divergiert

2.12 Satz (Wurzelkriterium)

Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Dann gelten folgende Aussagen:

- (1) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \implies$ Reihe konvergiert absolut
- (2) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \implies$ Wurzelkriterium liefert KEINE Aussage über Konvergenz und Divergenz
- (3) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies$ Reihe divergiert

2.13 Satz (Integralvergleichskriterium)

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert.

2.14 Satz (Vergleichskriterium)

Hat die Folge (b_n) für $n \geq n_0$ stets dasselbe Vorzeichen, so gilt:

- (1) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ mit $c \neq 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (2) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ mit $c \neq 0$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2.15 Satz (Summe konvergenter Folgen)

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + \lambda \cdot b_k)$ konvergent.

2.16 Satz (Konvergenz der Exponentialreihe)

Die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut und es gilt die Restgliedabschätzung

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x)$$

wobei $|r_{n+1}(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.17 Satz (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut kkonvergente Reihen.

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

2.18 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

Es gilt $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2.19 Satz (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

Für die Exponentialfunktion gilt:

- (1) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- (2) Insbesondere ist $e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, wobei $\mathbb{R}_{>0} := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \right\}$.
- (3) Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.
- (4) Die Exponentialfunktion ist überall stetig.

so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\text{grad} \left(f(x_0) \right) = \lambda \cdot \text{grad} \left(F(x_0) \right)$$

Bemerkung: Das λ wird der zugehörige Lagrange-Multiplikator genannt. Die Funktion $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ (hier nur im 2-dimensionalen dargestellt) heißt Lagrange-Funktion.

7.7 Satz (monoton steigende Funktion)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und seien $f, g: D \rightarrow E$ Funktionen mit $f(x_0) \leq g(x_0)$. Sei $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion.

Dann gilt auch $h(f(x_0)) \leq h(g(x_0))$.

Existiert die Inverse h^{-1} und ist diese ebenfalls monoton steigend, so gilt

$$f(x_0) \leq g(x_0) \iff h(f(x_0)) \leq h(g(x_0))$$

VIII Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Definition (Differentialgleichung)

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $k \in \mathbb{N}$. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung k ist eine Gleichung der Form

$$F(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0$$

Dabei ist F eine gegebene Funktion auf einer Teilmenge U von $I \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ mit Werten in \mathbb{R}^n .

Die Funktion $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung der Differentialgleichung, falls gilt:

- x ist k -mal differenzierbar auf I
- $(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) \in U$
- $F(t, x(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0, t \in I$

8.2 Definition (explizit, homogen, autonom)

Eine Differentialgleichung heißt explizit, falls sie in der Form

$$x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$$

gegeben ist, andernfalls implizit.

Eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{j=0}^k A_j(t) x^{(j)} + f(t) = 0$$

mit linearen A_j heißt linear von der Ordnung k . Sie heißt homogen, falls $f \equiv 0$, sonst inhomogen.

Ist $F(t, x, \dots, x^{(k)}) = 0$ NICHT explizit von t abhängig, so heißt die Differentialgleichung autonom.

für genügend kleines $\varepsilon > 0$, so nennt man das lokale Maximum **isoliert**. Ist $x_0 \in \Omega$, so spricht man von einem inneren (isolierten) Maximum.
Analog sind lokale Minima definiert.
Die Menge aller lokalen Minima und Maxima bildet die Menge aller Extremstellen von f . Die zugehörigen Funktionswerte nennen wir **Extremwerte**.

7.3 Definition (Definitheit)

Eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A heißt **positiv definit** (bzw. **positiv semidefinit**), wenn

$$\langle Av, v \rangle > 0 \ (\geq 0) \ \forall v \neq 0$$

Entsprechend heißt A **negativ (semi-)definit**, wenn

$$\langle Av, v \rangle < 0 \ (\leq 0) \ \forall v \neq 0$$

A heißt **indefinit**, wenn A weder positiv noch negativ (semi-)definit ist.

7.4 Satz (notwendiges Kriterium für das Vorhandensein von Extremstellen)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei in x_0 differenzierbar und besitze dort ein inneres Extremum. Dann gilt:

$$\nabla f(x_0) = 0$$

7.5 Satz (hinreichendes Kriterium)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Punkt in Ω . Dann gilt:

- (i) $\nabla f(x_0) = 0$ und Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ positiv definit $\implies f$ besitzt ein isoliertes Minimum an der Stelle x_0
- (ii) f besitzt ein isoliertes Minimum an der Stelle $x_0 \implies \nabla f(x_0) = 0$ und Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ ist positiv semidefinit
- (iii) $\nabla f(x_0) = 0$ und Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ negativ definit $\implies f$ besitzt ein isoliertes Maximum an der Stelle x_0
- (iv) f besitzt ein isoliertes Maximum an der Stelle $x_0 \implies \nabla f(x_0) = 0$ und Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ ist negativ semidefinit
- (v) Ist die Hesse-Matrix $D^2 f(x_0)$ indefinit, so liegt ein Sattelpunkt vor.

7.6 Satz (Extrema unter Nebenbedingungen)

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sowohl $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, als auch $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiterhin sei $\text{grad}(F(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Ist x_0 ein lokaler Extremwert von f aus

$$B := \left\{ x \mid F(x) = 0 \right\}$$

2.20 Satz (Logarithmusfunktion)

Die Exponentialfunktion $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ bildet \mathbb{R} bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab. Die Umkehrfunktion $\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

2.21 Satz (Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

2.22 Satz (Additionstheorem der Tangens-Funktion)

Es gilt

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

wenn beide Seiten existieren.

2.23 Beispiel (geometrische Reihe)

- (1) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k \geq 0} c^k$$

ist genau dann konvergent, wenn $|c| < 1$ ist.

Ist $|c| < 1$, so ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}$$

- (2) $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ ist konvergent und es gilt $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$

2.24 Bemerkung (geometrische Summenformel)

Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

2.25 Bemerkung (Konvergenz)

Sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Dann ist $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^p}$ konvergent.

$\forall s \in \mathbb{R}$ mit $s > 0$ ist $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ konvergent.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ konvergent.

2.26 Die harmonische Reihe

Die harmonische Reihe ist divergent.

2.27 Die alternierende harmonische Reihe

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent.

2.28 Bemerkung (Konvergenz und Grenzwert)

Sei $(a_k)_{k \geq n_0}$ eine Folge und sei $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k \geq n_0} a_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k \geq n_1} a_k \text{ konvergent}$$

und im Konvergenzfall ist

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n_1-1} a_k + \sum_{k=n_1}^{\infty} a_k$$

2.29 Bemerkung (Nullfolge)

$$\sum_{k \geq n_0} a_k \text{ konvergent} \implies (a_k)_{k \geq n_0} \text{ Nullfolge}$$

2.30 Bemerkung (absolut konvergent)

Ist $\sum_{k \geq n_0} a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k \geq n_0} a_k$ konvergent und es ist

$$\left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$$

2.31 Korollar (Wurzelkriterium)

Sei $(a_k)_{k \geq n_0}$ eine Folge, für welche die Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|} \right)_{k \geq n_0}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\sum_{k \geq n_0} a_k \begin{cases} \text{absolut konvergent} \\ \text{divergent} \end{cases}, \text{ wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}$$

2.32 Bemerkung (Konvergenz gegen e)

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a$

6.79 Satz (Parametrisierungen nach Bogenlänge)

Es seien $c_1: \mathbb{R} \supset I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $c_2: \mathbb{R} \supset I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parametrisierungen nach der Bogenlänge derselben Kurve c .

- Falls c_1 und c_2 gleich orientiert sind, ist die zugehörige Parametertransformation $\Phi: I_1 \rightarrow I_2$ mit $c_1 = c_2 \circ \Phi$ von der Form $\Phi(t) = t + t_0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.
- Falls c_1 und c_2 entgegengesetzt orientiert sind, ist sie von der Form $\Phi(t) = -t + t_0$.

6.80 Satz (parametrisierte Kurve)

Sei $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ mit $t_{i+1} - t_i < \delta$, wobei $i = 0, \dots, k$ gilt:

$$|L[c] - L[P]| < \varepsilon$$

wobei $P = (c(t_0), \dots, c(t_k))$.

6.81 Satz (Länge unabhängig von Wahl der Parametrisierung)

Sei $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär parametrisiert und $\tilde{c} = c \circ \Phi: [a', b'] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung mit $\Phi: [a', b'] \rightarrow [a, b]$. Dann gilt $L[\tilde{c}] = L[c]$.

6.82 Satz (Krümmung)

Sei $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene Kurve. Für die Krümmung $\kappa(t)$ gilt dann

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3}$$

VII Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher

7.1 Definition (Hesse-Matrix)

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar in x_0 . Dann heißt

$$D^2 f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1, \dots, n}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle x_0 .

7.2 Definition (lokales Extremum)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f besitzt an der Stelle $x_0 \in \tilde{\Omega}$ ein lokales Maximum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \tilde{\Omega} \cap U(x_0, \varepsilon)$$

Gilt sogar

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in \tilde{\Omega} \cap U(x_0, \varepsilon), x \neq x_0$$

6.72 Definition (Länge der Kurve)

Sei $c: I \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$L[c] = \int_a^b |c'(t)| \, dt$$

die Länge der Kurve c im Intervall $[a, b]$.

6.73 Definition (Periode, geschlossen)

Wir nennen die parametrisierte Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ periodisch mit Periode L , falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$c(t + L) = c(t) \quad \text{mit } L > 0$$

Außerdem fordern wir, dass es KEIN $0 < \tilde{L} < L$ gibt mit $c(t + \tilde{L}) = c(t) \, \forall t \in \mathbb{R}$.

Eine Kurve nennen wir geschlossen, wenn sie eine periodische reguläre Parametrisierung besitzt.

6.74 Definition (einfach geschlossen)

Eine geschlossene Kurve c nennen wir einfach geschlossen, wenn sie eine periodische reguläre Parametrisierung c mit Periode L besitzt und zwar mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung auf das Intervall $[0, L)$, also $c|_{[0, L)}$ injektiv ist.

6.75 Definition (Normalenfeld)

Sei $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Das Normalenfeld ist definiert als

$$n(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot c'(t)$$

6.76 Definition (ebene Krümmung)

Sei $c: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Die Funktion $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$, die der Gleichung

$$c''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

genügt, heißt Krümmung von c .

6.77 Satz (regulär parametrisiert)

Eine Kurve c sei regulär parametrisiert. Dann ist jede Umparametrisierung wieder regulär.

6.78 Satz (rektifizierbar, regulär parametrisierte Kurve)

Jede rektifizierbare, regulär parametrisierte Kurve lässt sich so umparametrisieren, dass die Umparametrisierung nach Bogenlänge parametrisiert ist.

III Funktionen einer Veränderlichen

3.1 Definition (Differenzierbarkeit)

Es sei $D \subset \mathbb{R}$, D offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen, f ist im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In diesem Fall schreiben wir

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oder auch

$$\frac{d}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen $f'(x_0)$ die Ableitung (den Differentialquotient) von f an der Stelle x_0 . f heißt in D differenzierbar, falls f im Punkt x_0 differenzierbar ist für alle $x_0 \in D$.

3.2 Definition (Differenzenquotient)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Differenzenquotient.

3.3 Definition (Höhere Ableitungen)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Wenn die Ableitung $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ von f in $x_0 \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Ableitung von f' die zweite Ableitung von f im Punkt $x_0 \in D$. Wir schreiben dann

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} := f''(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Dies können wir für höhere Ableitungen fortsetzen. Die k -te Ableitung schreiben wir dann als

$$\frac{d^k f(x_0)}{dx^k} := f^{(k)}(x_0) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(k-1)} f(x)}{dx^{(k-1)}} \right)$$

f heißt in D k -mal differenzierbar, wenn f für alle $x_0 \in D$ k -mal differenzierbar ist.

f heißt in D k -mal stetig differenzierbar, wenn zusätzlich zur k -maligen Differenzierbarkeit die k -te Ableitung $f^{(k)}$ stetig in D ist.

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$C^k(D) := \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist in } D \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar} \right\}$$

Weiterhin setzen wir

$$C^\infty(D) := \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist in } D \text{ beliebig oft differenzierbar} \right\}$$

und mit C^0 bezeichnen wir den Raum aller stetigen Funktionen.

3.4 Definition (Extrempunkt)

Seien $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein lokales Maximum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Gilt für diese x sogar die strikte Ungleichung $f(x_0) > f(x)$, so heißt das lokale Maximum strikt bzw. isoliert.

Gilt $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$, so heißt das Maximum global.

Die Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein lokales Minimum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Gilt für diese x sogar die strikte Ungleichung $f(x_0) < f(x)$, so heißt das lokale Minimum strikt bzw. isoliert.

Gilt $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$, so heißt das Minimum global.

Der Begriff des Extremums ist der Oberbegriff für Minimum und Maximum. Gegebenenfalls sahen wir auch Tiefpunkt bzw. Hochpunkt.

3.5 Definition (Kritischer Punkt)

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so nennen wir eine Stelle $x \in D$ mit $f'(x) = 0$ kritischer Punkt.

3.6 Definition (Wendepunkte)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Funktionsgraphen von f , an welchem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert. Der Graph wechselt hier von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt.

3.7 Satz (Jede differenzierbare Funktion ist stetig)

Ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist sie auch in x_0 stetig.

3.8 Satz (Ableitungsregeln)

Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ offene Mengen und $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f \pm g, f \cdot g$ und, wenn zusätzlich $g(x_0) \neq 0$ gilt, auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gelten folgende Ableitungsregeln:

- (1) Summenregel: $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- (2) Produktregel/Leibnizregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (3) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

- (4) Seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Funktion f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar und g sei in $f(x_0) \in E$ differenzierbar.

Dann ist die Funktion $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Die parametrisierte Kurve

$$\tilde{c} := c \circ \Phi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die sich so ergibt, heißt dann Uparametrisierung von c .

6.67 Definition (Orientierungserhaltend, Orientierungsumkehrend)

Wir nennen eine Parametertransformation Φ Orientierungserhaltend, falls

$$\Phi'(t) > 0 \quad \forall t$$

und Orientierungsumkehrend, falls

$$\Phi'(t) < 0 \quad \forall t$$

6.68 Definition (Parametrisierung nach Bogenlänge)

Eine regulär parametrisierte Kurve $c: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$|c'(t)| = 1 \quad \forall t \in I$$

nennen wir eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve (im Folgenden auch nur „regulär“ genannt).

6.69 Definition (Spur)

Wird eine Kurve durch eine reguläre Kurve $c: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dargestellt, dann nennt man das Bild $c(I)$ auch die Spur der Kurve.

6.70 Definition (Orientierung)

Auf der Menge der parametrisierten Kurven lässt sich eine Äquivalenzrelation definieren, indem man Kurven als äquivalent ansieht, wenn sie durch Orientierungserhaltende Parametertransformationen auseinander hervorgehen. Eine orientierte Kurve ist dann einfach eine Äquivalenzklasse dieser Relation.

6.71 Definition (Rektifizierbarkeit einer Kurve, Länge einer Kurve)

Eine parametrisierte Kurve $c: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt auf dem Intervall $[a, b] \subset I$ rektifizierbar, falls

$$L[c] := L\left(c \Big|_{[a,b]}\right) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^k |c(t_i) - c(t_{i-1})| \mid k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \right\}$$

endlich ist, also wenn $L\left(c \Big|_{[a,b]}\right) < \infty$.

In diesem Fall nennen wir $L\left(c \Big|_{[a,b]}\right)$ die Länge der Kurve c auf dem Intervall $[a, b]$.

und $j = 1, \dots, n$ existieren und jeweils stetig von x abhängen. Hierbei ist $f^i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die i -te Koordinatenfunktion von f .

Insbesondere gilt für das Differential $Df(x)$ die Gleichung

$$Df(x)(v) = J_f(x) \cdot v^T$$

wobei $J - f(x)$ die Jacobi-Matrix von f bezeichne.

6.62 Lemma (Lemma von Schwarz)

V und W seien zwei Banachräume, $\Omega \subset V$ offen und $f: \Omega \rightarrow W$ sei in $x_0 \in \Omega$ zweimal stetig differenzierbar.

Dann ist die stetige bilineare Abbildung $D^2f(x_0) := V \times V \rightarrow W$ symmetrisch, das heißt, es gilt:

$$D^2f(x_0)(v_1, v_2) = D^2f(x_0)(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

6.63 Satz (zweimal stetig differenzierbar)

Eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow W$ ist genau dann in Ω zweimal stetig differenzierbar, wenn sie dort zweimal partiell differenzierbar ist und sämtliche partiellen Ableitungen dort stetig sind.

D Kurven

6.64 Definition (Kurve)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Eine parametrisierte Kurve ist einfach eine glatte (das heißt unendlich oft differenzierbar) Abbildung der Form

$$c: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ist $n = 2$, so sprechen wir von einer ebenen Kurve. Ist $n = 3$ so nennen wir c eine Raumkurve.

6.65 Definition (regulär parametrisiert)

Eine parametrisierte Kurve heißt regulär parametrisiert, wenn der Geschwindigkeitsvektor (erste Ableitung, geschrieben $c'(t)$) nirgends verschwindet, das heißt, wenn

$$c'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

6.66 Definition (Unparametrisierung, Parametertransformation)

Sei $c: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Eine **Parametertransformation** von c ist für uns ein Diffeomorphismus $\Phi: J \rightarrow I$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall ist, sodass zwei Dinge gelten:

- Φ ist bijektiv
- $\Phi: J \rightarrow I$ und $\Phi^{-1}: I \rightarrow J$ sind unendlich oft differenzierbar

3.9 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ offen und $f: D \rightarrow E$ eine stetige und bijektive Funktion. Ist die Funktion f in x_0 differenzierbar und gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch f^{-1} in $f(x_0) =: y$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3.10 Satz (Notwendige Bedingung für Extrempunkt)

Gegeben sei eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt. Ist die Funktion f differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.

3.11 Satz (Satz von Rolle)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

3.12 Bemerkung (Terrassenpunkt)

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens dreimal differenzierbar und gilt

$$f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$$

so nennen wir eine Stelle $x \in D$ Terrassenpunkt.

3.13 Satz (Monotonie)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und in (a, b) differenzierbar. Gilt für alle $x \in (a, b)$ die Ungleichung

$$f'(x) \geq 0 \quad , \quad f'(x) > 0 \quad , \quad f'(x) \leq 0 \quad , \quad f'(x) < 0$$

so ist die Funktion f in (a, b)

monoton wachsend , streng monoton wachsend , monoton fallend , streng monoton fallend.

3.14 Satz (Isoliertes lokales Maximum/Minimum)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, im Intervall (a, b) differenzierbar und in $x_0 \in (a, b)$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein isoliertes lokales Maximum bzw. Minimum.

3.15 Satz (Regel von L'Hospital)

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Weiterhin seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und es existiere der Limes

$$\lim_{x \nearrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$$

Dann folgt:

(1) Falls $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} g(x) = 0$ gilt:

$$\lim_{x \nearrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

(2) Falls $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} g(x) = \pm\infty$ gilt:

$$\lim_{x \nearrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Analoge Aussagen werden für den Grenzübergang $x \searrow a$ formuliert.

3.16 Definition (Treppenfunktion)

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $\tau: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, sodass $\tau|_{\overline{(x_{i-1}, x_i)}}$ für jedes $i = 1, \dots, n$ jeweils konstant ist. Mit $T[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$.

3.17 Definition (Integral)

Seien $\tau: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls, für die jeweils $\tau|_{\overline{(x_{i-1}, x_i)}}$ konstant ist, wobei $i = 1, \dots, n$.

Wir setzen dann $\int_a^b \tau(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ mit gewissen c_i und nennen $\int_a^b \tau(x) dx$ das **Integral** von τ auf dem Intervall $[a, b]$.

3.18 Definition (Ober- und Unterintegral)

Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &:= \inf \left\{ \int_a^b \tau(x) dx \mid f \leq \tau, \tau \in T[a, b] \right\} \\ \int_a^b f(x) dx &:= \sup \left\{ \int_a^b \tau(x) dx \mid f \geq \tau, \tau \in T[a, b] \right\} \end{aligned}$$

und nenne diese das **Oberintegral** bzw. das **Unterintegral**.

3.19 Definition (Riemann-Integral)

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **riemann-integrierbar**, wenn f beschränkt ist und das Oberintegral und das Unterintegral übereinstimmen. In diesem Fall schreiben wir

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

6.54 Definition (höhere Ableitung)

Für zwei Banachräume V und W , eine offene Teilmenge $\Omega \subset V$ und $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\mathcal{C}^k(\Omega, W) := \left\{ f: \Omega \rightarrow W \mid f \text{ ist in } \Omega \text{ } k\text{-mal stetig differenzierbar} \right\}$$

sowie

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega, W) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{C}^k(\Omega, W)$$

6.55 Satz (Linearität der Ableitung)

Gegeben seien zwei Abbildungen $f, g: \Omega \rightarrow W$, die in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar sind und eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Abbildungen $f + g$, λf in x_0 differenzierbar mit

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) \quad , \quad D(\lambda f)(x_0) = \lambda Df(x_0)$$

6.56 Satz (Eindeutigkeit der Ableitung)

$f: \Omega \rightarrow W$ sei wie in 6.48. Dann ist L eindeutig bestimmt.

6.57 Satz (differenzierbare Abbildungen sind stetig)

Die Abbildung $f: \Omega \rightarrow W$ sei differenzierbar in $x_0 \in \Omega$. Dann ist f in x_0 auch stetig.

6.58 Satz (Kettenregel)

$(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ seien Banach-Räume, $\Omega \subset U$ und $\tilde{\Omega} \subset V$ jeweils offen. Sind $f: \Omega \rightarrow V$, $g: \tilde{\Omega} \rightarrow W$ Abbildungen mit $f(\Omega) \subset \tilde{\Omega}$ und sind f in $x_0 \in \Omega$ und g in $f(x_0) \in \tilde{\Omega}$ differenzierbar, so ist auch die Verkettung $g \circ f: \Omega \rightarrow W$ in x_0 differenzierbar und es gilt die Gleichung

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

6.59 Satz (Mittelwertgleichung)

W sei ein Banach-Raum und $f: [a, b] \rightarrow W$ eine stetige Abbildung, die auf (a, b) differenzierbar sei mit $\|Df(x)\| \leq M$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M|x - y| \quad \forall x, y \in (a, b)$$

6.60 Satz (Zusammenhang zwischen Differential und Richtungsableitung)

V, W seien zwei Banach-Räume, $\Omega \subset V$ sei offen und $f: \Omega \rightarrow W$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann existieren in x_0 sämtliche Richtungsableitungen und es ist

$$Df(x_0)(v) = D_v f(x_0)$$

6.61 Satz (stetig differenzierbar)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist die Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann in Ω stetig differenzierbar, wenn in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ mit $i = 1, \dots, m$

Ist f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und hängt $Df(x_0)$ stetig von x_0 ab, so heißt f in Ω **stetig differenzierbar**. Wir setzen

$$C^1(\Omega, W) := \left\{ f: \Omega \rightarrow W \mid f \text{ ist in } \Omega \text{ stetig differenzierbar} \right\}$$

6.49 Definition (Richtungsableitung)

Seien V, W Banach-Räume und $\Omega \subset V$ offen. Eine Abbildung $f: \Omega \rightarrow W$ besitzt an der Stelle $x_0 \in \Omega$ eine **Richtungsableitung** in Richtung $v \in V$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

existiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert mit $D_v f(x_0)$ und dieser heißt Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v .

6.50 Definition (partielle Ableitung)

Ω sei eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , W ein Banach-Raum und $f: \Omega \rightarrow W$ eine Abbildung. f heißt in $x_0 \in \Omega$ nach der j -ten Variable **partiell differenzierbar**, wenn f an der Stelle x_0 eine Richtungsableitung in Richtung e_j besitzt. Hierbei ist (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis des \mathbb{R}^n . Die entsprechende Ableitung wird dann mit $D_j f(x_0)$ oder auch mit $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ bezeichnet.

6.51 Definition (Gradient)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \Omega$ partiell differenzierbar. Der **Gradient** von f an der Stelle x_0 ist der Vektor

$$\text{grad}(f(x_0)) := \nabla f(x_0) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) e_i$$

6.52 Definition (Jacobi-Matrix)

Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so nennt man die Matrix

$$J_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$$

die **Jacobi-Matrix** von f an der Stelle x_0 .

6.53 Definition (zweimal differenzierbar)

V und W seien Banach-Räume, $\Omega \subset V$ offen und $f: \Omega \rightarrow W$ differenzierbar in Ω . Ist dann die Abbildung $DF: \Omega \rightarrow L(V, W)$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so heißt f an der Stelle x_0 **zweimal differenzierbar** und wir schreiben $D^2 f(x_0)$ für $(D(DF))(x_0)$. Es ist $D^2 f(x_0) \in L(V, L(V, W))$.

und nennen $\int_a^b f(x) dx$ das **Riemann-Integral**. Den Raum aller riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a, b]$.

3.20 Definition (Unbestimmtes Integral)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei riemann-integrierbar und $c \in [a, b]$. Dann heißt die Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_c^x f(\xi) d\xi$ das **unbestimmte Integral** von f .

3.21 Definition (Stammfunktion)

Eine Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Wir schreiben $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3.22 Definition (Uneigentliche Integrale)

Wir unterscheiden einige Fälle:

- (1) $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ riemann-integrierbar (also insbesondere beschränkt) ist. Falls der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert, heißt das

Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergent und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Bei Nichtexistenz nennen wir das Integral divergent.

Solche Integrale heißen **uneigentliches Integrale**. Ähnlich erklären wir das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

für die Funktion $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die jeweils auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b] \subset (-\infty, b]$ riemann-integrierbar sind und bei denen der Grenzwert $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert.

- (2) Nun sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b] \subset (a, b]$ riemann-integrierbar ist mit $\varepsilon > 0$. Falls der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ existiert, so sagen wir, das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert und setzen

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Ähnlich verfahren wir für die Funktionen $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir setzen dort

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

- (3) Schließlich betrachte wir noch den Fall einer Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $c \in (a, b)$ beliebig und sei f riemann-integrierbar.

Falls sowohl das uneigentliche Integral $\int_a^c f(x) dx$ als auch das uneigentliche Integral $\int_c^b f(x) dx$ konvergiert, so sagen wir, dass $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert und setzen

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3.23 Satz (Treppenfunktion)

Sei $\tau \in T[a, b]$ eine Treppenfunktion und

$$a = x_0 < \dots < x_n = b, \quad a = y_0 < \dots < y_m = b$$

seien zwei Unterteilungen des Intervalls $[a, b]$, sodass für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ jeweils

$$\tau \Big|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i, \quad \tau \Big|_{(y_{j-1}, y_j)} = d_j$$

gilt, wobei $c_i, d_j \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ geeignete Konstanten sind. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^m d_j (y_j - y_{j-1})$$

3.24 Satz (Linearität des Integrals)

Der Raum aller riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}[a, b]$ ist ein reeller Vektorraum, das heißt, es gilt für alle $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

und

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$$

3.25 Satz (Differenzierbarkeit des unbestimmten Integrals)

Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $c \in [a, b]$. Dann ist das unbestimmte Integral F von f stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$.

3.26 Satz (Riemann-integrierbar)

Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ riemann-integrierbar

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ zwei Treppenfunktion } \tau, \sigma \in T[a, b] \text{ mit } \tau \leq f \leq \sigma \text{ und } \exists \int_a^b \tau(x) dx - \int_a^b \sigma(x) dx \leq \varepsilon$$

6.42 Satz (Stetigkeitskriterium)

Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist stetig.
- (ii) Die Urbilder d_N -offener Mengen sind d_M -offen.
- (iii) Die Urbilder d_N -abgeschlossener Mengen sind d_M -abgeschlossen.

6.43 Satz (kompakte Menge)

Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f: M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung. Dann sind die Bilder d_M -kompakter Mengen wieder d_N -kompakt.

6.44 Satz (kompakte Teilmenge II)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset M$ beschränkt und nimmt ihr Supremum und Infimum an.

6.45 Satz (kompakte Teilmengen II)

Seien (M, d_M) und (N, d_N) zwei metrische Räume und $f: M \rightarrow N$ stetig. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge von M sogar gleichmäßig stetig.

6.46 Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

(M, d) sei ein vollständig metrischer Raum und $f: M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt in M .

6.47 Satz (normierte Vektorräume)

Eine lineare Abbildung $L: V \rightarrow W$ zwischen normierten Vektorräumen ist genau dann beschränkt, wenn sie stetig ist.

Insbesondere sind stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen auch lipschitz-stetig.

C Differenzierbare Abbildungen

6.48 Definition (differenzierbare Abbildung, Differential)

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei Banachräume, $\Omega \subset V$ offen und $f: \Omega \rightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt f im Punkt $x_0 \in \Omega$ **(total) differenzierbar**, wenn es eine beschränkte (also stetige) lineare Abbildung $L: V \rightarrow W$ gibt, sodass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)\|_W}{\|x - x_0\|_V} = 0$$

In diesem Fall nennen wir die Abbildung L das **Differential** oder auch **Ableitung** an der Stelle x_0 und schreiben hierfür $Df(x_0)$. f heißt (total) differenzierbar in Ω , wenn sie in jedem $x_0 \in \Omega$ (total) differenzierbar ist.

6.35 Definition (Folgenstetigkeit)

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt x_0 (folgen)stetig, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ist. f heißt (folgen)stetig, wenn f in jedem Punkt aus dem Definitionsbereich (folgen)stetig ist.

6.36 Definition (Stetigkeit in metrischen Räumen)

f heißt (punktweise) stetig im Punkt $x_0 \in M$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in M \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

f heißt stetig, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in M$ stetig ist.

6.37 Definition (gleichmäßige Stetigkeit in metrischen Räumen)

f heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x, x' \in M \text{ mit } d_M(x, x') < \delta \text{ gilt } d_N(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

6.38 Definition (Lipschitz-Stetigkeit in metrischen Räumen)

f heißt lipschitz-stetig, wenn es eine Konstant $L \geq 0$ gibt, sodass

$$d_N(f(x), f(x')) \leq L \cdot d_M(x, x') \quad \forall x, x' \in M$$

6.39 Definition (Fixpunkt)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung. Ein Punkt $m \in M$ heißt Fixpunkt von f , wenn $f(m) = m$ gilt.

6.40 Definition (Kontraktion)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f: M \rightarrow M$ heißt Kontraktion, wenn eine Konstante $C \in [0, 1)$ existiert für alle x mit der Eigenschaft

$$d(f(x), f(y)) \leq C \cdot d(x, y)$$

6.41 Satz (Zusammensetzung stetiger Funktionen)

Seien (M, d_M) , (N, d_N) und (L, d_L) drei metrische Räume und $f: L \rightarrow M$ sei stetig in $x_0 \in L$ und $g: M \rightarrow N$ sei stetig in $y_0 := f(x_0)$.

Dann ist auch die Funktion $g \circ f: L \rightarrow N$ stetig in x_0 .

Weiterhin gelten für zwei Metrische Räume (M, d_M) und (N, d_N) folgende Aussagen:

Seien $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in M$ und $g: N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $y_0 \in N$. Dann sind auch die Funktionen $f(x) + g(y)$, $f(x) - g(y)$, $f(x) \cdot g(y)$ und, sofern $g(y) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(y)}$ bezüglich der Produktmetrik auf $M \times N$ stetig im Punkt (x_0, y_0) .

3.27 Satz (Stetige Funktionen)

Stetige Funktionen sind riemann-integrierbar.

3.28 Satz (Beschränkte und monotone Funktionen)

Jede beschränkte und monotone Funktion ist riemann-integrierbar.

3.29 Satz (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3.30 Satz (Partielle Integration)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [(f \cdot g)(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

3.31 Satz (Substitutionsregel)

Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $\Phi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt die Substitutionsformel

$$\int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(t) dt$$

3.32 Satz (Partialbruchzerlegung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine gebrochene rationale Funktion der Form

$$f(x) := \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

Für die Integration mittels Partialbruchzerlegung gibt es drei für uns wichtige Ansätze:

- (1) Nennerpolynom besitzt eine einfache Nullstelle
- (2) Nennerpolynom besitzt eine doppelte Nullstelle
- (3) Nennerpolynom besitzt eine komplexe Nullstelle
- (4) Kombination aus obigen drei Möglichkeiten

3.32.1 Nennerpolynom besitzt eine einfache Nullstelle (Beispiel)

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$x^2 - 3x + 2$ besitzt nur einfache Nullstellen und wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} &= \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1) + B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A - 2B}{(x-2)(x-1)} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $(A+B)x - A - 2B \stackrel{!}{=} 1$ und es folgt

(i) $A + B = 0$

(ii) $-A - 2B = 1$

Insgesamt ergibt sich $A = 1$ und $B = -1$ und wir rechnen

$$\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|$$

3.32.2 Nennerpolynom besitzt eine doppelte Nullstelle (Beispiel)

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{2x^2 + 1}{x(x^2 - 2x + 1)} dx = \int \frac{2x^2 + 1}{x(x-1)^2} dx$$

$x(x-1)^2$ besitzt unter anderem eine doppelte Nullstelle und wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2(A+B) + x(-2A - b + C) + A}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $x^2(A+B) + x(-2A - B + C) + A \stackrel{!}{=} 2x^2 + 1$ und es folgt

(i) $A + B = 2$

(ii) $-2A - B + C = 0$

(iii) $A = 1$

Insgesamt ergibt sich $A = 1$ und $B = 1$ und $C = 3$ und wir rechnen

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} dx = \ln|x| + \ln|x-1| - \frac{3}{x-1}$$

3.32.3 Nennerpolynom besitzt eine komplexe Nullstelle (Beispiel)

$$\int \frac{1}{x^3 + x} dx = \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx$$

6.28 Satz (Rand, Abschluss und Inneres)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Dann sind der Rand ∂A und der Abschluss \bar{A} abgeschlossen und das Innere $\overset{\circ}{A}$ offen.

6.29 Satz (Heine-Borel)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann sind für eine Teilmenge $K \subset M$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) K ist überdeckungskompakt
- (ii) K ist folgenkompakt
- (iii) K ist total beschränkt und vollständig

6.30 Satz (Kompaktheit)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$ kompakt. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset K$ auch kompakt.

6.31 Satz (Kompaktheit mit Standardmetrik)

Sei \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik (euklidischen Metrik) versehen. Dann ist eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

6.32 Satz (Metrik auf einem normierten Vektorraum)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann wird durch

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad d(x, y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf V definiert.

B Stetige Abbildungen

6.33 Definition (Funktion mehrerer Veränderlicher)

Eine reellwertige Funktion in mehreren Veränderlichen ist eine Abbildung

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

6.34 Definition (Grenzwert einer Funktion)

Seien M und N metrische Räume und d_M und d_N Metriken auf M bzw. N . Weiterhin sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

Der Limes (Grenzwert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

existiert, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$d_N(f(x), a) < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } d_M(x, x_0) < \delta$$

(ii) Homogenität: $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in K \quad \forall v \in V$

(iii) Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V , so heißt $(V, \|\cdot\|)$ ein **normierter Vektorraum**.

6.19 Definition (Normenäquivalenz)

Es seien V ein Vektorraum und $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ seien zwei Normen auf V . Dann heißen die Normen **äquivalent**, wenn zwei positive Konstanten μ und λ existieren, sodass

$$\lambda \|v\| \leq \|v\| \leq \mu \|v\| \quad \forall v \in V$$

6.20 Definition (Banachraum)

Sei $(v, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Ist V dann mit der durch $d(x,y) = \|x - y\|$ definierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum, so nennt man $(V, \|\cdot\|)$ einen **Banach-Raum**.

6.21 Definition (Exponentialfunktion linearer Abbildungen)

Seien V ein Banach-Raum und A ein beschränkter Endomorphismus. Dann setzen wir

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \quad (t \in \mathbb{R})$$

6.22 Satz (Durchschnitt offener Mengen)

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

6.23 Satz (Vereinigung offener Mengen)

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.

6.24 Satz (Vereinigung abgeschlossener Mengen)

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

6.25 Satz (Durchschnitt abgeschlossener Mengen)

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

6.26 Satz (hausdorffsche Trennungseigenschaft)

Sei (M,d) ein metrischer Raum. Dann gibt es zu je zwei beliebigen Punkten $x,y \in M$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und v von y mit $U \cap V = \emptyset$.

6.27 Satz (endliche Teilmenge)

Jede endliche Teilmenge eines metrischen Raums (M,d) ist abgeschlossen.

$x(x^2 + 1)$ besitzt unter anderem eine komplexe Nullstelle und wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + x} &= \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)} \\ &= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^2(A + B) + Cx + A}{x(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $x^2(A + B) + Cx + A \stackrel{!}{=} 1$ und es folgt

(i) $A + B = 0$

(ii) $C = 0$

(iii) $A = 1$

Insgesamt ergibt sich $A = 1$ und $B = -1$ und $C = 0$ und wir rechnen

$$\int \frac{1}{x^3 + x} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2|$$

3.33 Arkustangens

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x)$$

3.34 Satz vom Maximum

3.34.1 Lemma (Beschränktheits-Lemma)

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall (d. h. abgeschlossen und beschränkt). Dann ist jede stetige Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

3.34.2 Satz (Satz vom Maximum)

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres, kompaktes Intervall. Dann nimmt jede stetige Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Maximum an. Das heißt, es gibt mindestens ein $\xi \in [a,b]$, sodass für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$f(x) \leq f(\xi)$$

3.34.3 Satz (Satz von Weierstraß)

Analog 3.34.2 gilt, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ein Minimum besitzt.

3.34.4 Korollar (Stetiges Bild eines kompakten Intervalls)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein kompaktes Intervall.

IV Mittelwertsatz und Taylorformel

4.1 Definition (Taylorreihe)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann heißt die Reihe

$$T_f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt x_0 .
Man nennt

$$T_f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das n -te Taylorpolynom.

4.2 Definition (Restglied)

Das n -te Restglied $R_n(X)$ einer Taylorentwicklung einer Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 ist definiert als

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Es gibt zwei wichtige Restglieddarstellungen:

(1) Restglieddarstellung nach Lagrange

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

wobei ξ zwischen x_0 und x liegt.

(2) Integraldarstellung des Restglieds

$$R_n(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

4.3 Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Es seien $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.4 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$.
Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

4.5 Korollar (Mittelwertsatz)

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$.

6.11 Definition (beschränkt)

Eine Teilmenge $K \subset M$ eines metrischen Raums (M, d) heißt beschränkt, wenn ein $x \in M$ und ein $r \in \mathbb{R}$ existieren mit der Eigenschaft, dass $K \subset U(x, r)$.

6.12 Definition (Kompaktheit)

Eine Teilmenge $K \subset M$ eines metrischen Raums (M, d) heißt beschränkt, wenn K berdeckungskompakt ist.

6.13 Definition (topologischer Raum)

Seien M eine Menge und $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$ ein System von Teilmengen von M . \mathcal{O} heißt Topologie auf M und das Paar (M, \mathcal{O}) topologischer Raum, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

- (i) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$
- (ii) $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O} \implies \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$
- (iii) Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $(\Omega_i)_{i \in I}$ Elemente von \mathcal{O} , dann ist auch $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{O}$

Die Elemente der Topologie nennen wir offen.

6.14 Definition (offene Teilmenge)

Sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann nennt man eine Teilmenge $\Omega \subset M$ offen, wenn $\Omega \in \mathcal{O}$.

6.15 Definition (abgeschlossene Teilmenge)

Sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subset M$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $M \setminus A$ offen ist.

6.16 Definition (Umgebung)

Sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Ist $p \in M$, so heißt $\Omega \in \mathcal{O}$ eine offene Umgebung von p , wenn $p \in \Omega$.

6.17 Definition (zusammenhängend)

Sei (M, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann heißt dieser zusammenhängend genau dann, wenn es außer der leeren Menge und M selbst KEINE zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M gibt.

6.18 Definition (Norm)

Sei V ein K -Vektorraum, wobei K in der Regel entweder \mathbb{R} oder \mathbb{C} sein soll.

Eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \rightarrow K$$

heißt Norm, wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

- (i) Positive Definitheit: $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$
Gleichheit gilt genau dann, wenn $v = 0$ ist.

6.3 Definition (Umgebung)

Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt Umgebung eines Punktes $x \in M$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U(x, \varepsilon) \subset U$. Insbesondere ist $U(x, \varepsilon)$ selbst eine Umgebung von x . Man nennt $U(x, \varepsilon)$ die ε -Umgebung von x .

6.4 Definition (offene Menge)

Eine Menge $\Omega \subset M$ eines metrischen Raums (M, d) heißt offen, genauer d -offen, wenn gilt:

$$\forall x \in \Omega \exists \varepsilon > 0: U(x, \varepsilon) \subset \Omega$$

6.5 Definition (abgeschlossene Menge)

Eine Menge $A \subset M$ eines metrischen Raums (M, d) heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $M \setminus A$ offen ist. Für das Komplement schreibt man auch oft A^c .

6.6 Definition (Rand)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $x \in M$ heißt Randpunkt von A , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ sowohl $U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ als auch $U(x, \varepsilon) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$ gilt.

Wir definieren den Rand ∂A durch

$$\partial A := \left\{ x \in M \mid x \text{ ist Randpunkt von } A \right\}$$

6.7 Definition (Inneres)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Das Innere von A ist definiert als $\mathring{A} := A \setminus \partial A$.

6.8 Definition (Abschluss)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Der Abschluss von A ist definiert als $\bar{A} := A \cup \partial A$.

6.9 Definition (offene Überdeckung)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Sei weiterhin I eine beliebige Indexmenge. Mit \mathcal{O} bezeichnen wir die Menge aller offenen Teilmengen von M .

Eine offene Überdeckung $(\Omega_i)_{i \in I}$ von K ist eine Familie von offenen Teilmengen Ω_i , deren Vereinigung die Menge K umfasst, das heißt, $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, wobei $\Omega_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$.

6.10 Definition (überdeckungskompakt)

Seien (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$ eine Teilmenge.

K heißt überdeckungskompakt, wenn es zu jeder beliebig vorgegebenen offenen Überdeckung $(\Omega_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt eine endliche Teilmenge $E \subset I$, sodass $K \subset \bigcup_{i \in E} \Omega_i$.

4.6 Satz (Taylorformel)

V sei ein Banach-Raum, $\Omega \subset V$ offen und $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$. Für ein $x_0 \in \Omega$ und $t \in V$ gelte

$$\left\{ x_0 + rt \mid r \in [0, 1] \right\} \subset \Omega$$

Dann existiert ein $\Theta \in [0, 1]$, sodass

$$\begin{aligned} f(x_0 + t) = & f(x_0) + Df(x_0)(t) + \frac{1}{2!} D^2 f(x_0)(t, t) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} f(x_0) \underbrace{(t, \dots, t)}_{(k-1)\text{-mal}} + \frac{1}{k!} D^k f(x_0 + \Theta t) \underbrace{(t, \dots, t)}_{k\text{-mal}} \end{aligned}$$

V Potenzreihen

5.1 Definition (Potenzreihe)

Unter einer Potenzreihe verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit einer reellen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ wird dabei der Entwicklungspunkt und a_n für $n \in \mathbb{N}$ werden Koeffizienten genannt.

Hinsichtlich der Konvergenz sind drei Fälle möglich:

Die Potenzreihe konvergiert entweder für

- $x = x_0$ oder
- auf einem Intervall (symmetrisch um x_0) oder
- auf ganz \mathbb{R}

5.2 Definition (Konvergenzradius einer Potenzreihe)

Als Konvergenzradius einer Potenzreihe an der Stelle x_0 definieren wir die größte Zahl $r > 0$, für welche die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert.

Falls die Reihe nur für x_0 konvergiert, so ist der Konvergenzradius 0.

Konvergiert sie für alle x , so ist der Konvergenzradius ∞ .

Mit $(x_0 - r, x_0 + r)$ bezeichnen wir das Konvergenzintervall.

5.3 Satz (Formeln von Cauchy-Hadamard und Euler)

Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gilt die Formel von Cauchy-Hadamard:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)}$$

In vielen Fällen kann der Konvergenzradius einfacher durch folgende Formel von Euler berechnet werden:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

sofern der Limes existiert. Es gilt nun:

- (1) $|x - x_0| < r \implies$ Potenzreihe konvergiert absolut
- (2) $|x - x_0| > r \implies$ Potenzreihe ist divergent
- (3) $|x - x_0| = r \implies$ kann alles bedeuten; muss separat für alle x untersucht werden

5.4 Satz (Ableitung einer Potenzreihe)

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls (Konvergenzkreises) differenzierbar und die Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

Weiterhin ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ derselbe wie von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

5.5 Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Eine Potenzreihe ist auf einem offenen Intervall $]a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig oft (gliedweise) differenzierbar.

5.6 Berechnung des Konvergenzradius

Möglichkeit 1

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geq n_0$, sodass $a_k \neq 0 \forall k \geq n_1$ und die Folge $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right)_{k \geq n_1}$ konvergiert gegen ein $s \in \mathbb{R}$.

Dann ist der Konvergenzradius gleich $\begin{cases} \infty, & \text{wenn } s = 0 \\ \frac{1}{s}, & \text{wenn } s \neq 0 \end{cases}$

Möglichkeit 2

Die Folge $\left(\sqrt[k]{|a_k|} \right)_{k \geq n_0}$ konvergiert gegen ein $s \in \mathbb{R}$.

Dann ist der Konvergenzradius gleich $\begin{cases} \infty, & \text{wenn } s = 0 \\ \frac{1}{s}, & \text{wenn } s \neq 0 \end{cases}$

5.7 Bemerkung (Konvergenzradius)

Sei $f(x) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k (x - a)^k$.

Es gilt: Die durch gliedweises Differenzieren bzw. Integrieren aus $\sum_{k \geq n_0} a_k (x - a)^k$ gewonnen Potenzreihen

$$\sum_{k \geq n_0+1} k a_k (x - a)^{k-1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k \geq n_0} \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1}$$

haben den gleichen Konvergenzradius wie $\sum_{k \geq n_0} a_k (x - a)^k$.

Sei $\sum_{k \geq n_0} a_k (x - a)^k$ eine Potenzreihe. Wenn ihr Konvergenzradius gleich $r \in \mathbb{R}$ ist, sei $I =]a - r; a + r[$, sonst $I = \mathbb{R}$.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k (x - a)^k \forall x \in I$.

Dann gilt:

- (1) f ist differenzierbar und $\forall x \in I$ ist

$$f'(x) = \sum_{k \geq n_0+1} k a_k (x - a)^{k-1}$$

- (2) Die Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{k \geq n_0} \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1}$ ist eine Stammfunktion von f .

VI Kurven und Funktionen mehrerer Veränderlicher

A Metrische und topologische Räume

6.1 Definition (Metrik)

Sei M eine Menge. Eine Metrik ist eine Abbildung

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

auf $M \times M$, für die folgende drei Axiome erfüllt sind:

- (i) Positive Definitheit: $\forall x, y \in M: d(x, y) \geq 0$
Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = y$ ist.
- (ii) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in M$
- (iii) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in M$

Das Paar (M, d) nennt man metrischen Raum.

6.2 Definition (offene, abgeschlossene Kugel)

Seien (M, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$ und $r > 0$.

Die Menge

$$U(x_0, r) := \left\{ x \in M \mid d(x, x_0) < r \right\}$$

bezeichnen wir als offene Kugel.

Die Menge

$$B(x_0, r) := \left\{ x \in M \mid d(x, x_0) \leq r \right\}$$

bezeichnen wir als abgeschlossene Kugel.

Ab und an sagen wir statt „Kugel“, auch „Ball“.